* Model Nisbah Alih & transf Laplace

* Apa itu NISBAH ALIH ??

What is a TRANSFER FUNCTION ??

δ. delta

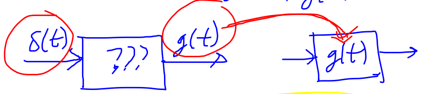
Δ. DELTA

Nisbah Alih adalah tanggapan denyut

Transfer Function is the impulse response

Artinya,

Jika suatu sistem menghasilkan isyarat g(t) ketika diberi masukan isyarat denyut satuan δ(t), maka nisbah-alih sistem itu adalah g(t)



* Apa itu isyarat denyut satuan (δ(t)) ?

Unit Impulse

δ(t) adalah suatu isyarat matematis, yang TIDAK ADA realisasi fisik-nya yang IDEAL.

Fenomena alam yang paling mendekati δ(t), misalnya:

- Sambaran petir
- Pukulan stick golf pada bola golf
- bunga api listrik

sesuatu yang sangat "keras" berlangsung sangat "cepat"

Secara matematis, isyarat denyut satuan δ(t) mempunyai 2 (dua) sifat:

* δ(t) hanya ada pada t = 0.

$$\delta(t) \begin{cases} = 0, & t \neq 0 \\ \neq 0, & t = 0 \end{cases}$$

* Luas bidang antara δ(t) dan sumbu t adalah 1 satuan luas

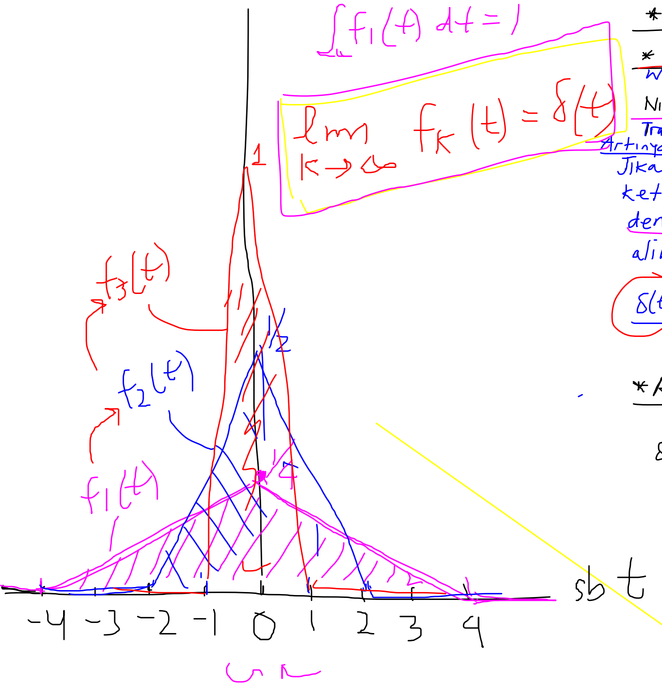
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

* Bagaimana membuat δ(t) ?

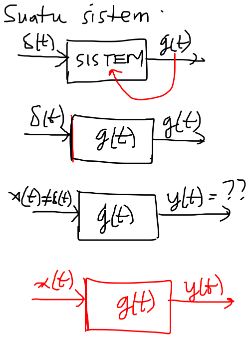
δ(t) dapat dibuat secara matematis dengan berbagai cara. Salah satu caranya adalah sbb

$$\int f_1(t)\, dt = 1$$

$$\lim_{k \to \infty} f_k(t) = \delta(t)$$



* Suatu sistem:



~~y(t) = g(t).x(t)~~

y(t) = Konvolusi x(t) dan g(t).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

τ = "tau"

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Integral KONVOLUSI

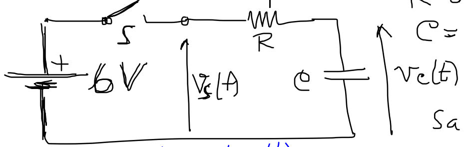
Transformasi Laplace

menghindari Konvolusi

Transformasi Laplace

* Contoh ELEKTRIK

Pemuatan Kapasitor



$R = 0{,}5\,M\Omega$

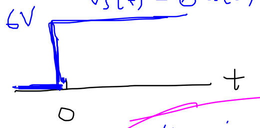
$C = 2\ \mu F$

Saklar S ditutup pada t=0, tentukan

$v_c(t),\ t \geq 0$

$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1} V_c(s)$

$v_s(t) = 6u(t)$



u(t) = isyarat undak satuan
= unit step function

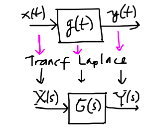
$V_s(s) = \mathcal{L}\, v_s(t)$

$= \mathcal{L}\, 6u(t)$

$= 6\, \mathcal{L}\, u(t)$

$= 6/s$

Transformasi Laplace



~~$y(t) = g(t)\, x(t)$~~ tidak sahih → integral konvolusi

$G(s) = \mathcal{L}\, g(t) \rightleftarrows g(t) = \mathcal{L}^{-1} G(s)$

$X(s) = \mathcal{L}\, x(t) \rightleftarrows x(t) = \mathcal{L}^{-1} X(s)$

$Y(s) = \mathcal{L}\, y(t) \rightleftarrows y(t) = \mathcal{L}^{-1} Y(s)$

$Y(s) = G(s) . X(s)$

$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

(time) $t \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} s$ (peubah Laplace)

REAL COMPLEX $a + jb$

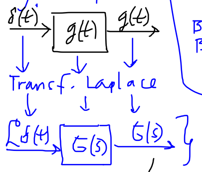
$j = \sqrt{-1}$

Contoh. * CONTOH MATEMATIS.

Tentukan Transformasi Laplace dari isyarat denyut satuan $\delta(t)$!

$\mathcal{L}\, \delta(t) = \ldots ?$

→ Dengan definisi



$G(s) = G(s) . \mathcal{L}\, \delta(t)$

$\mathcal{L}\, \delta(t) = \frac{G(s)}{G(s)} = 1$

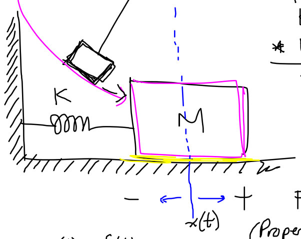
→ Dengan Tabel Laplace
Laplace Table

Baris 1 Table 4.1 : $f(t) = \delta(t) \to F(s) = 1$

Baris 1 Appendix . $F(s) = 1 \to f(t) = \delta(t)$

$\mathcal{L}\, \delta(t) = 1$

* CONTOH MEKANIK



M = 1 kg
K = 4 N/m.

* Pers. diffrensial

$F(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + K x(t)$

Transf Laplace

$F(s) = M s^2 X(s) + K X(s)$

(Property # 3, hal 58)

$F(t) \simeq \delta(t)$

$F(s) = \mathcal{L}\, F(t) = \mathcal{L}\, \delta(t) = 1 \to$

$1 = 1 s^2 X(s) + 4 X(s)$

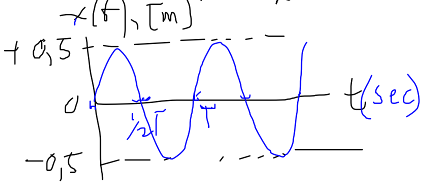
$1 = (s^2 + 4) X(s)$

$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1} X(s) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + 4}$

$= \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{s^2 + 2^2} \right)$

$= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2}{s^2 + 2^2} \right)$



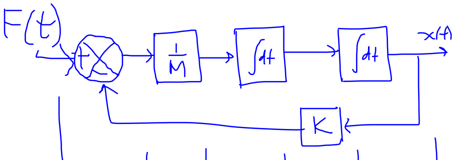
(baris 6, Table 4.1.) → $x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$

$\omega = 2\pi f = 2$

$f = \frac{1}{\pi}$ Hertz

$T = \frac{1}{f} = \pi$ second

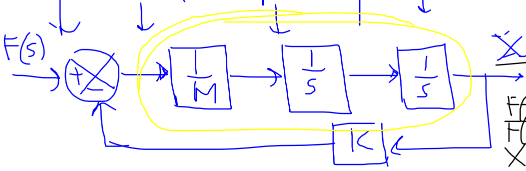
* Bagan Kotak.

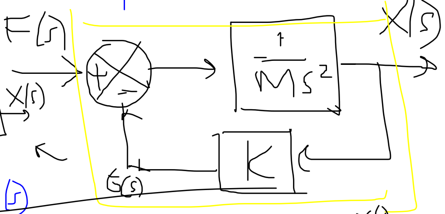


Transf. Laplace

Property # 4
hal. 58

$\mathcal{L} \int dt = \frac{1}{s}$





X(s)

$F(t) = \delta(t)$

$F(s) = 1$

$X(s) = \frac{1}{Ms^2 + K}$

$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$

$= \frac{1/Ms^2}{1 + K/Ms^2}$

$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + K} \to X(s) = G(s)\, F(s)$

*** "ORDER" dari SISTEM**

Order dari suatu sistem/sistem kendali, dapat dilihat dari model Nisbah-Alih-nya.

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\dots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\dots+a_1 s+a_0}$$

m, n bilangan bulat. 0, 1, 2, 3, --- , $\boxed{m \leq n}$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ koefisien REAL

$b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ Koefisien REAL

Order dari sistem ditentukan oleh derajat polynomial penyebut, yaitu n. Jadi sistem di atas adalah sistem order ke-n

Contoh: * "Double Integrator" $G(s)=\frac{1}{s^2}$ adalah sistem order kedua (second order)

* "Phase Compensator" $H(s)=\frac{s+a}{s+b}$ adalah sistem order pertama (first order)

* "Sistem Kendali dengan Kompensator"

$$G_T(s)=\frac{s+a}{s^3+bs^2+s+a}$$

adalah sistem orde ketiga (third order sistem)

Catatan :

Sistem order ketiga atau yang lebih tinggi, selalu bisa diuraikan menjadi sistem orde pertama dan/atau sistem orde kedua

next : "POLE" dan "ZERO"

*** Pole dan Zero**

Jika suatu sistem kendali/kendalian dimodelkan dengan nisbah-alih

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

maka nilai-nilai s yang memenuhi (akar-akar) persamaan

$N(s)=0$, disebut "zero" dari G(s)

$D(s)=0$, disebut "pole" dari G(s)

Karena itu, order dari sebuah sistem adalah jumlah pole-nya, dan akar-akar persamaan karakteristik adalah pole-pole dari CLTF-nya (mengapa???)

Contoh : Suatu kendalian "simple integrator" $G(s)=\frac{1}{s}$ dikendalikan dengan kompensator $H(s)=\frac{s+2}{s+3}$.

Tentukan : (a) Pole dan Zero dari G(s) dan H(s)

(b) Pole dan Zero dari OLTF G(s)H(s)

(c) Pole dan Zero dari CLTF

(d) Order dari Sistem Kendali

(e) Persamaan Karakteristik dan akar²nya

(a) $G(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow$ no zero ! Pole, $s=0 \rightarrow p=0$

$H(s)=\frac{s+2}{s+3} \longrightarrow$ Zero $s+2=0 \longrightarrow z=-2$

Pole $s+3=0 \longrightarrow p=-3$

(b) OLTF . $G(s)H(s)=\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{s+2}{s+3}\right)=\frac{s+2}{s(s+3)}$

Zero $G(s)H(s)$: $s+2=0 \longrightarrow z=-2$

Pole $G(s)H(s)$: $s(s+3)=0 \rightarrow p_1=0$

$p_2=-3$

(c) CLTF . $G_T(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$

$$\frac{\frac{s+2}{s(s+3)}}{1+\frac{s+2}{s(s+3)}} \longrightarrow =\frac{s+2}{s^2+3s+s+2}=\frac{s+2}{s^2+4s+2}$$

Zero : $s+2=0$

$z=-2$

Pole : $s^2+4s+2=0$

$$p_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}$$

$=-2\pm\sqrt{2}$

(d) Jumlah pole CLTF ada 2, maka sistem kendali ini adalah sistem order KEDUA

e) Akar-akar pers. karakteristik : $1+G(s)H(s)=0$

$$1+\frac{s+2}{s(s+3)}=0 \longrightarrow s^2+4s+2=0$$

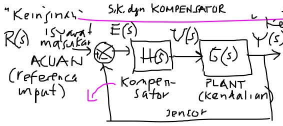
$$s_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}$$

$=-2\pm\sqrt{2} \longrightarrow$ pole² CLTF

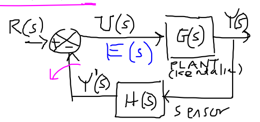
Bab III Istilah-istilah Khusus

* Sistem Kendali dengan KOMPENSATOR dan Sistem Kendali dengan UMPAN-BALIK

S.K. dgn KOMPENSATOR



S.K. dgn UMPAN-BALIK



Pada sistem kendali dengan kompensator, isyarat kendali U(s) dihasilkan dari "kompensator" isyarat selisih (E(s), error)

$E(s)=R(s)-Y(s)$

$U(s)=H(s).E(s)$

$=H(s)\left[R(s)-Y(s)\right]$

$Y(s)=G(s).U(s)$

$=G(s).H(s)\left[R(s)-Y s)\right]$

$=G(s).H(s).R(s-G(s).H(s).Y(s)$

$Y(s)+G(s)H(s).Y(s)=G(s).H(s).R(s)$

$\left[1+G(s)H(s)\right]Y(s)=G(s).H(s).R(s)$

$$\boxed{G_T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s).H(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

Pada Sistem Kendali dengan umpan-balik, isyarat kendali U(s) merupakan selisih antara masukan acuan R(s) dengan manipulasi keluaran Y(s)

$E(s)=U(s)=R(s)-Y'(s)$

$U(s)=R(s)-H(s).Y(s)$

$Y(s)=G(s)\,U(s)$

$=G(s)\left[R(s)-H(s)\,Y(s)\right]$

$=G(s).R(s)-G(s)H(s)\,Y(s)$

$Y(s)+G(s)H(s)Y(s)=G(s).R(s)$

$\left[1+G(s)H(s)\right]Y(s)=G(s).R(s)$

$$\boxed{G_T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

$G_T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ (s.k. UMPAN BALIK)

Istilah-istilah

* Nisbah Alih Daur Terbuka
Open-loop Transfe Fuction (OLTF)

* Nisbah Alih Daur Tertutup
Closed-loop Trans f Function

* Persamaan Karakteristik
Characteristic Equation

sama² $G(s)H(s)$

$G_T(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$ (s k dg. KOMPENSATOR)

sama² $1+G(s)H(s)=0$

Contoh soal

Suatu kendalian "double integrator" $\left(G(s)=\frac{1}{s^2}\right.$ dikendalikan dengan "phase-compensator" $H(s)=\frac{s+a}{s+b}$.

phase lead/lag

Tentukanlah. * OLTF

* CLTF

* Persamaan Karakteristik-nya

Bagaimana jika $H(s)=\frac{s+a}{s+b}$ ditempatkan pada umpan balik

* OLTF . $G(s)H(s)=\frac{1}{s^2}\,\frac{s+a}{s+b}=\frac{s+a}{s^2(s+b)}$

* CLTF . $G_T(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\frac{s+a}{s^2(s+b)}}{1+\frac{s+a}{s^2(s+b)}}=\frac{s+a}{s^3+bs^2+s+a}$

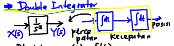
* Pers. karakteristik, $1+G(s)H(s)=0$

$$1+\frac{1}{s^2}\,\frac{s+a}{s+b}=0 \longrightarrow 1+\frac{s+a}{s^3+bs^2}=0 \rightarrow s^3+bs^2+s+a=0$$

ξ

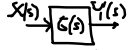
*** Sistem Order Kedua**
Second Order Systems

* Double Integrator



Diketahui $x(t)=\delta(t)$
Ditanyakan $y(t)=$???

→ Bentuk umum Sistem Orde Kedua



ξ - zeta
ω_n omega-n

$G(s)=\frac{K}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

ξ = nisbah redaman (damping ratio)
ω_n = frekuensi alamiah tak teredam [radian/sec]
(undamped natural frequency)

$G(s)=\frac{10}{s^2+4}$ ✓

$G(s)=\frac{10}{s^2+4s+4}$ → $=\frac{10}{(s+2)^2}$ ✓

$\boxed{x(t)=\delta(t) \longrightarrow y(t) \text{ tergantung pada } \xi}$

* $\xi>1$ teredam lebih (overdamped) $G(s)=\frac{K}{(s+a)(s+b)}$ $a=\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$
$b=\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

* $\xi=1$ teredam kritis (critically damped) $G(s)=\frac{K}{(s+a)^2} \rightarrow a=\omega_n$

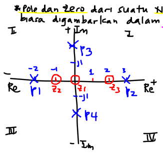
* $0<\xi<1$ teredam kurang (underdamped) $a=\xi\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
$b=\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=\omega_d$ d = damping

* $\xi=0$ tak teredam (undamped) $G(s)=\frac{K}{s^2+\omega_n^2}$

$\omega_n=2\pi f_n$
rad/sec
Hertz

* $\xi<0$ → tidak stabil

* Pole dan zero dari suatu Nisbah Alih biasa digambarkan dalam bidang kompleks



Pole - ×
Zero - ○
Contoh

$G(s)=\frac{s(s+1)(s-2)}{(s+2)(s-3)(s^2+4)}$

Zero : $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=2$
Pole $p_1=-2$ $p_2=3$
$s^2+4=0 \rightarrow p_3=j2$
$j=\sqrt{-1}$ $p_4=-j2$

*** Isyarat-isyarat uji (Test Signals)**

* Isyarat denyut satuan $\delta(t)$, (sudah dipelajari)

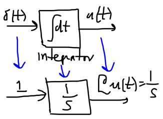
$\delta(t)\begin{cases}=0, t\neq 0\\ \neq 0, t=0\end{cases}$

* Isyarat undak satuan $u(t)$
Unit step function

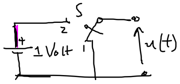
Definisi :

$u(t)\begin{cases}=0, t<0\\ =1, t\geqslant 0\end{cases}$

* Realisasi matematisi



*** Realisasi secara fisika**

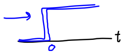


Saklar S dipindahkan dari posisi 1 ke posisi 2 pada t=0

Transformasi Laplace

Isyarat $u(t)$ →

$u(t)\begin{cases}=0, t<0\\ =1, t\geqslant 0\end{cases}$

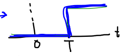


$U(s)=\frac{1}{s}$

$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
$=2,718...$

Isyarat $u(t-T)$ →

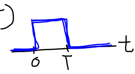
$u(t-T)\begin{cases}=0, t<T\\ =1, t\geqslant T\end{cases}$



$\mathcal{L}\,u(t-T)=\frac{1}{s}e^{-Ts}$

Isyarat $u(t)-(t-T)$

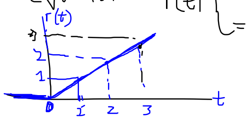
$u(t)-u(t-T)\begin{cases}=0, t<0\\ =1, 0\leq t<T\\ =0, t\geqslant T\end{cases}$



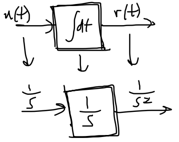
$\mathcal{L}\,u(t)-u(t-T)=\frac{1}{s}(1-e^{-Ts})$

*** Isyarat tanjak satuan $r(t)$**
Unit Ramp function

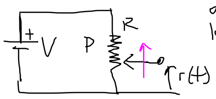
Definisi : $r(t)\begin{cases}=0, t<0\\ =t, t\geqslant 0\end{cases}$

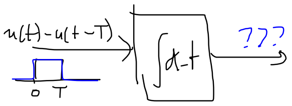


Realisasi matematis



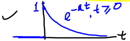
Realisasi fisik : P. Potensimeter digeser dengan kecepatan tetap r(t) naik 1V/sec





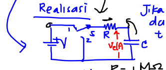
next : Isyarat eksponensial

* Isyarat eksponensial e^{-at}



← $x(t)\begin{cases}=0, t<0\\ =e^{-at}, t\geqslant 0\end{cases}$

Realisasi

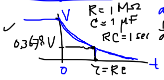


Jika saklar S dipindah dari posisi 1 ke 2 pada t=0, maka tegangan $v_c(t)=Ve^{-at}$, $t\geqslant 0$

$R=1\,M\Omega$
$C=1\,\mu F$
$RC=1$ sec

$a=\frac{1}{RC}$
$\frac{1}{a}=RC$

$RC=\tau$ (tau) konstanta waktu "time constant"

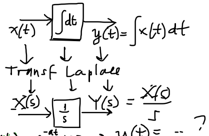


$t=\tau=\frac{1}{a}$, $v_c(t)=Ve^{-1}$
$=0,3678$ V

Pekan depan 27/11/13
MIDTEST (Open book, NO Laptop)
Bobot 40%
Bahan seluruhnya s/d kuliah 20/11/13
Jangan lupa. Bawa Tabel Laplace

*** Sistem Order Pertama**
(First Order Systems)

⇒ Contoh :
* Simple Integrator



$Y(s)=\frac{X(s)}{s}$

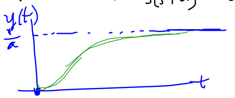
$e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}$

$x(t)=e^{-at}, t\geqslant 0 \rightarrow y(t)=$ .. ?

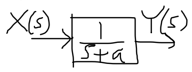
$X(s)=\mathcal{L}\,x(t)=\mathcal{L}\,e^{-at}=\frac{1}{s+a}$ (dari Tabel)

$Y(s)=\frac{1}{s}X(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s+a}=\frac{1}{s(s+a)}$

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\,Y(s)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s+a)}=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$



* Simple Lag

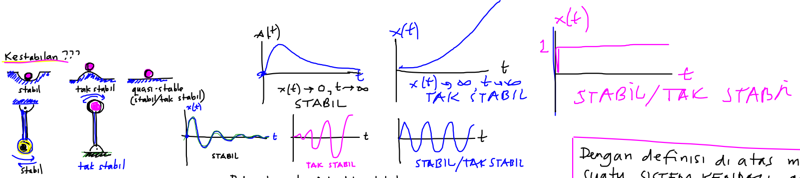


$x(t)=u(t) \longrightarrow y(t)=$ __ ?

$X(s)=\mathcal{L}\,x(t)=\mathcal{L}\,u(t)=\frac{1}{s}$

$Y(s)=\left(\frac{1}{s+a}\right)\frac{1}{s}=\frac{1}{s(s+a)} \longrightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\,Y(s)$
$=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s+a)}$
$=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$

Kestabilan ???



Bab I Pengenalan SISTEM KENDALI
Bab II Alat-alat matematik
Bab III Istilah-istilah khusus
Bab IV KESTABILAN

Tujuan pertama dan utama dari pengendalian adalah men-STABIL-kan sistem. Hanya sistem yang stabil yang dapat ditingkatkan kinerja (performance)-nya

- * Sistem Kendali OPTIMAL
- * Sistem Kendali ADAPTIF
- * Sistem Kendali KOKOH (Robust)
- * . . . .
- * Sistem Kendali CERDAS (smart) AI

Kestabilan ???

Dalam teori kendali, dikenal beberapa DEFINISI Kestabilan, misalnya

- * Kestabilan Asimptutir
- * Kestabilan BIBO (Bounded Input Bounded Output)
- * dll

tapi definisi yang banyak digunakan dalam Teori Kendali Klasik adalah sbb.

[Suatu sistem Kendali atau kendalian dikatakan STABIL, jika dan hanya jika tanggapan denyut-nya menuju nol]

↓

NISBAH ALIH

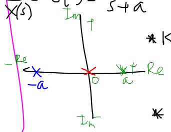
"Transfer Function"

Dengan definisi di atas maka kestabilan suatu SISTEM KENDALI atau suatu KENDALIAN cukup/bisa dilihat dan Nisbah Alih (Transfer Function)-nya

Misalnya.

* Sistem Order Pertama (Simple Integrator, Simple Pole)

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{1}{s+a} \rightarrow \begin{array}{l} x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(s) = 1 \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s+a} = e^{-at} \end{array}$$



* Kasus a > 0, pole pada p = −a (di sebelah KIRI sumbu khayal pada bid. kompleks)

$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-at} = 0 \rightarrow$ sistem stabil

* Kasus a = 0 ⟶ $y(t) = u(t) \rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \neq 0$
pole p = 0, pada titik Origin di sumbu khayal
sistem tak stabil

* Kasus a < 0 ⟶ $y(t) = e^{at}$
pole pada p = a > 0 ⟶ $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty \neq 0$
sistem tak stabil

[Sistem Order Pertama akan STABIL jika dan hanya jika pole-nya berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks]

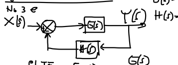
* Sistem Order Kedua

→ Double Integrator $G(s) = \frac{1}{s^2}$ 2 pole pada titik O
Tanggapan denyut-nya $y(t) = t$ atau $r(t)$
isyarat tanjak satuan (ramp function)
TIDAK STABIL

* $G(s) = \frac{1}{s(s+a)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{a}\left(1 + e^{-at}\right)$
TIDAK STABIL

* $\xi > 1 \rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{K_1}{s+a} + \frac{K_2}{s+b}$
(Overdamp)
Akan stabil jika dan hanya jika a > 0 DAN b > 0
(kedua POLE di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks)

Jawaban soal MID
No 3 e



$G(s) = \frac{1}{s}$
$H(s) = \frac{2s+1}{10s+1}$

CLTF $G_T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$
$= \frac{1/s}{1+\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{2s+1}{10s+1}\right)}$
$= \frac{10s+1}{10s^2+s+2s+1} = \frac{10s+1}{10s^2+3s+1}$
$= \frac{s+0{,}1}{s^2+0{,}3s+0{,}1}$

$\omega_n^2 = 0{,}1 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{0{,}1}$ rad/sec
$= 0{,}3162$ rad/sec

$2\xi\omega_n = 0{,}3 \rightarrow \xi\omega_n = 0{,}15 \rightarrow \xi = \frac{0{,}15}{\sqrt{0{,}1}} = 0{,}2677$

$x(t) = \delta(t) \longrightarrow X(s = \mathcal{L}\,\delta(t) = 1$

$Y(s) = G(s) = \frac{s+0{,}1}{s^2+0{,}3s+0{,}1} \rightarrow$ Tanggapan denyut.

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(s)$
$= \mathcal{L}^{-1}G(s)$
$= \mathcal{L}^{-1}\frac{s+0{,}1}{s^2+0{,}3s+0{,}1}$
lihat Tabel
$= \mathcal{L}^{-1}\frac{s+0{,}1}{(s+0{,}15)^2-(0{,}15)^2+0{,}1}$
$= \mathcal{L}^{-1}\frac{s+0{,}1}{(s+0{,}15)^2+(0{,}278)^2} \Rightarrow$

z = 0,1
a = 0,15
w = 0,278

$$x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$X(s) = s^2Y(s) + sY(s) + Y(s)$
$= (s^2+s+1)\,Y(s) \longrightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+s-1}$

$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}G(s)$
$= \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+s+1}$

$\omega_n^2 = 1 \rightarrow \omega_n = 1$ rad/sec
$2\xi\omega_n = 1 \rightarrow \xi = 0{,}5 \longrightarrow$ teredam lebih

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1\sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}75}$ rad/sec
$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$ rad/sec
$= 0{,}866$ rad/sec

$y(t) = \frac{1}{\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t$

$G(s) = \frac{1}{\tau s+1} \longrightarrow \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$

$= \frac{1/\tau}{s-1/\tau}$

* $0 < \xi < 1$
Tanggapan denyut
(underdamped)

$y(t) = \frac{1}{\omega_d}\underbrace{e^{-\xi\omega_n t}}_{\rightarrow 0,\ t\to\infty}\sin\omega_d t \rightarrow$ STABIL

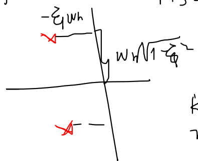
* $\xi = 1 \longrightarrow G(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$
(critically damped)

$y(t) = te^{-at} \longrightarrow \lim_{t\to\infty} te^{-at} = \begin{cases} \infty, & a<0 \\ t, & a=0 \\ 0, & a>0 \end{cases}$

STABIL jika dan jika a > 0, pole di sebelah kiri sumbu khayal

$G(s) = \frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \longrightarrow p_{1,2} = \underbrace{-\xi\omega_n}_{\text{REAL}} \pm j\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\text{IMAGINARY}}$

$As^2 + Bs + C$



Kedua pole (pasangan kompleks konyugasi) dua-duanya di sebelah KIRI sb. khayal

Contoh

* Suatu kendalian $G(s)=\frac{1}{s^2}$ dikendalikan oleh kompensator "phaselag/lead". $H(s)=\frac{K(s+a)}{s+b}$
Tentukan batas² nilai K, a dan b supaya sistem stabil!

Jawab Pers karakteristik $1+G(s).H(s)=0$

$$1+\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{K(s+a)}{s+b}\right)=0$$

$$P(s)=s^3+bs^2+Ks+Ka=0$$

Supaya sistem stabil semua akar pers. karakteristiknya harus berada di sebelah kiri sb khayal pada bidang kompleks.
Untuk itu polynomial P(s) harus memenuhi 2(dua) kriteria ROUTH:

(1) Semua koefisien bertanda-sama: $a_3=1>0$
$b>0$ $K>0$ $Ka>0 \rightarrow a>0$

(2) Tabel Routh:

s^3	1	K
s^2	b	Ka
s^1	$\frac{Kb-Ka}{b}$	0
s^0	Ka	0
	0	

$$\frac{Kb-Ka}{b}>0$$
$Kb-Ka>0$
$K(b-a)>0$
$b-a>0$
$b>a$

Batas² kestabilan

$$\boxed{\begin{array}{l}K>0\\ b>a>0\end{array}}$$

* Suatu sistem kendali mempunyai pers karakteristik:
$$P(s)=2s^8+4s^7+3s^6+6s^5+s^4+s^3+s^2+s+1=0$$
Tentukan apakah sistem itu stabil?

Jawab: Berdasarkan 2(dua) Kriteria Routh.
(1) → OK ←
(2) Tabel Routh.

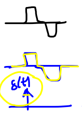
s^8	+	2	3	1	1	1
s^7	+	4	6	1	1	0
s^6	0	ε	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	*
s^5	−	$a<0$				

$$a=\frac{6\varepsilon-2}{\varepsilon}=6-\frac{2}{\varepsilon}=6-\infty<0$$
$\varepsilon\rightarrow 0$ $\frac{2}{\varepsilon}\rightarrow\infty$
$a<0$

Pergantian tanda pada kolom pertama Tabel Routh
→ TIDAK STABIL !!!

Suatu sistem kendali atau kendalian akan STABIL jika dan hanya jika SEMUA pole model nisbah alih-nya berada di sebelah KIRI sumbu khayal pada bidang kompleks

*



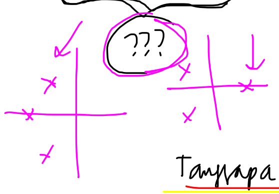
→ tidak kembali ke posisi seimbang → TIDAK STABIL
→ kembali ke posisi seimbang → STABIL atau TIDAK STABIL
→ menuju NOL

Contoh $G(s)=\frac{1}{s}$ → tidak STABIL
$H(s)=\frac{2s+1}{10s+1}$ (umpan-balik)

* Apakah H(s) men-stabil-kan G(s)?

Pers Karakteristiknya:
$$1+G(s)H(s)=0$$
$$1+\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{2s+1}{10s+1}\right)=0$$
$$10s^2+3s+1=0$$
akar-akar pers karakteristiknya:
$$s_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-40}}{20}$$
$$=-0{,}15\pm j0{,}05\sqrt{31}$$
s_1 dan s_2 ada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks → STABIL

$$1+\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{2s+1}{10s+1}\right)$$ ←
Pers karakt
$$10s^3+s^2+2s+1=0$$



Sistem Kendali < umpan balik / kompensator } plant: G(s) controller: H(s)

* Sistem Kendali di atas

CLTF

$$G_T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$
umpan-balik

$$G_T(s)=\frac{G(s).H(s)}{1+G(s)H(s)}$$
kompensator

Untuk mencari pole-pole $G_T(s)$, maka dicari "solusi" atau akar dari persamaan karakteristik: $\boxed{1+G(s)H(s)=0}$

Jelaslah bahwa POLE² dari CLTF $G_T(s)$ adalah AKAR² pers. karakteristiknya.

Tanggapan denyut:
$$y(t)=\cancel{\frac{1}{d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\ dt}$$
$$\cancel{\omega=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

apakah menuju nol untuk $t\rightarrow\infty$

Suatu sistem kendali akan STABIL jika dan hanya jika SEMUA akar pers. karakteristik-nya berada di sebelah KIRI sumbu khayal pada bidang KOMPLEKS

-Untuk mengetahui apakah akar² persamaan karakteristik dan sistem kendali SEMUA berada di sebelah kiri sumbu khayal atau tidak, tidak perlu mencari akar² tersebut terlebih dahulu.

Kriteria ROUTH:
1. Semua koefisien P(s) bertanda sama
2. Tidak ada pergantian tanda pada kolom pertama Tabel ROUTH

Tabel Routh

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_1	a_0
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_0	0
b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...		
c_n	c_{n-1}	c_{n-2}			

n ganjil ↓ atau
↑ n genap

$$b_n=\frac{a_{n-1}\cdot a_{n-2}-a_n\cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$
$$b_{n-1}=\frac{a_{n-1}\cdot a_{n-4}-a_n\,a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

Misalnya persamaan karakteristik suatu sistem kendali atau kendalian berbentuk polynomial s berderajat n sebagai berikut (sistem orde ke-n)

Pers. karak: $a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\dots+a_1s+a_0=0$
"P(s)" $a_0,a_1,a_2,\dots a_n$ adalah koefisien REAL

Semua akar pers karakteristik akan berada di sebelah kiri sb. khayal jika dan hanya jika polynomial P(s) memenuhi 2 KRITERIA ROUTH

$$\boxed{\text{Polynomial } P(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\dots+a_1s+a_0}$$