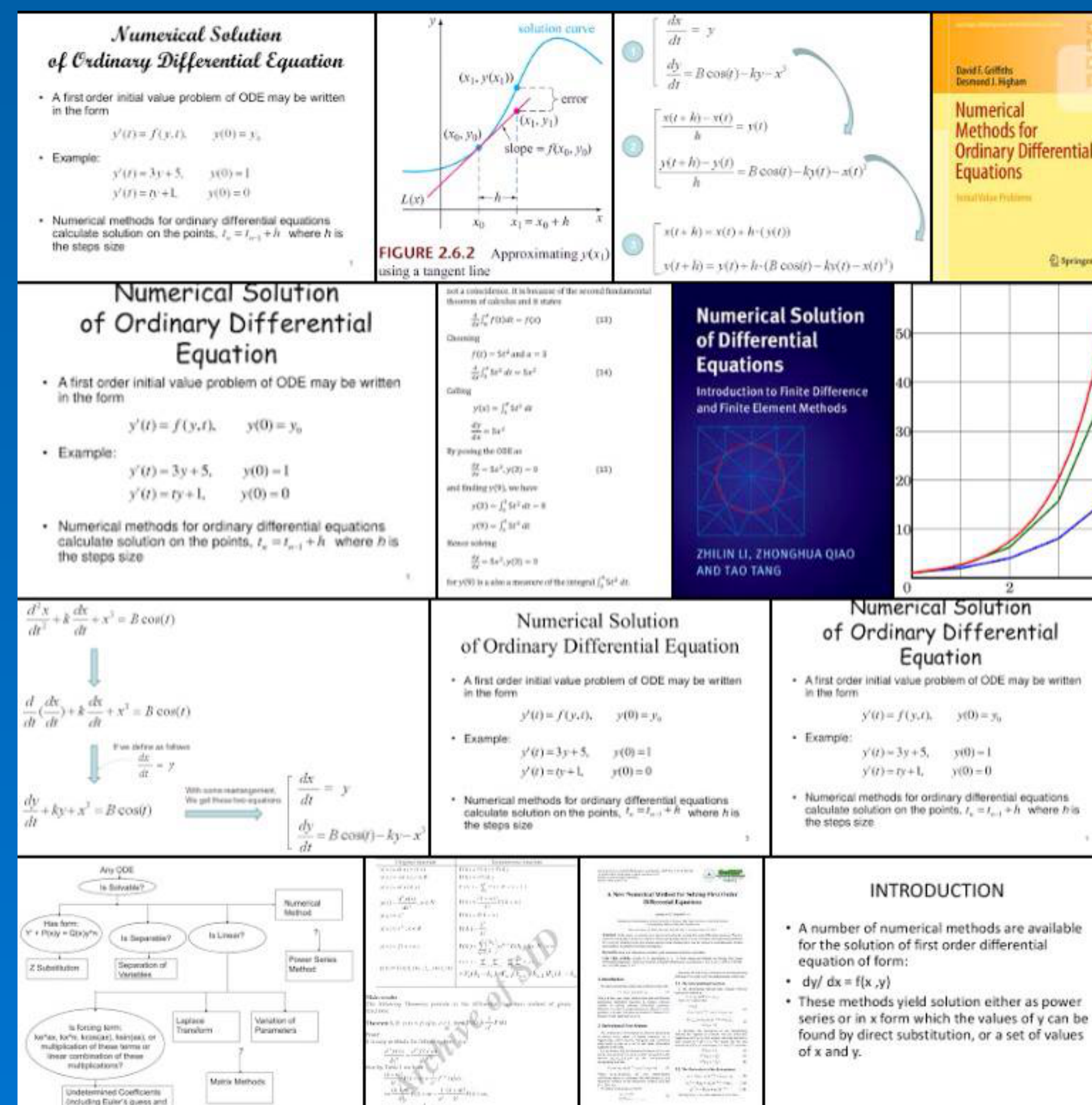
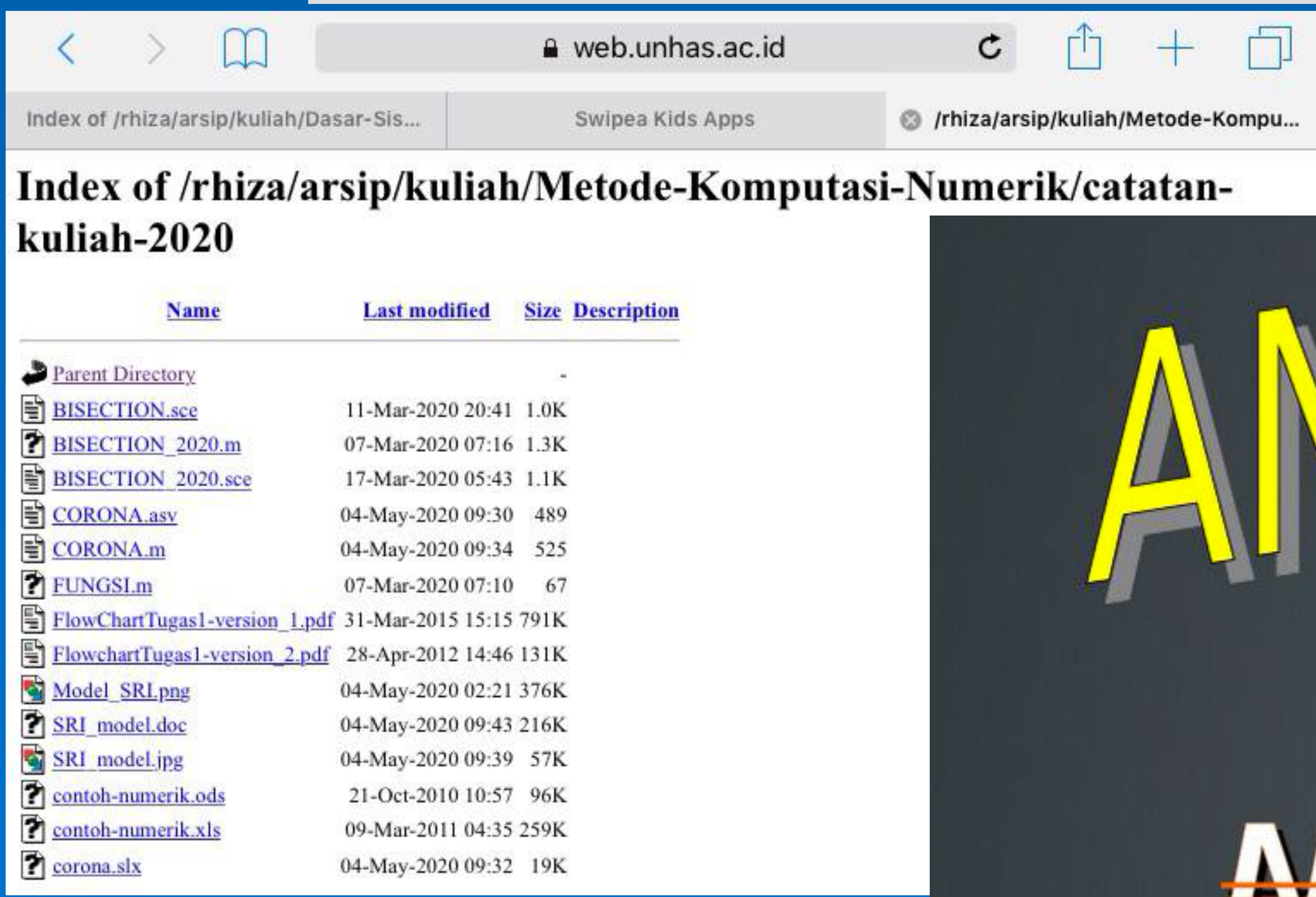
208D4223
METODE KOMPUTASI NUMERIK
ANALITIK vs NUMERIK
Sub-MODUL 2C Mencari SOLUSI Persamaan Differensial



(versi kuliah DARLING =
semi-DARing semi-LurING)
Semester Akhir 2020-2021

Sumber Pembelajaran

- Sumber pembelajaran: **https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Metode-Komputasi-Numerik/Materi-Kuliah-2015/kasus3-pers-diff-biasa.pdf**
- Catatan Kuliah: **https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Metode-Komputasi-Numerik/catatan-kuliah-2020/** khususnya *files*: **contoh-numerik.ods** atau **contoh-numerik.xls**



Index of /rhiza/arsip/kuliah/Metode-Komputasi-Numerik/catatan-kuliah-2020

Name	Last modified	Size	Description
Parent Directory		-	
BISECTION.sce	11-Mar-2020 20:41	1.0K	
BISECTION_2020.m	07-Mar-2020 07:16	1.3K	
BISECTION_2020.sce	17-Mar-2020 05:43	1.1K	
CORONA.asv	04-May-2020 09:30	489	
CORONA.m	04-May-2020 09:34	525	
FUNGSI.m	07-Mar-2020 07:10	67	
FlowChartTugas1-version_1.pdf	31-Mar-2015 15:15	791K	
FlowchartTugas1-version_2.pdf	28-Apr-2012 14:46	131K	
Model_SRI.png	04-May-2020 02:21	376K	
SRI_model.doc	04-May-2020 09:43	216K	
SRI_model.jpg	04-May-2020 09:39	57K	
contoh-numerik.ods	21-Oct-2010 10:57	96K	
contoh-numerik.xls	09-Mar-2011 04:35	259K	
corona.slx	04-May-2020 09:32	19K	

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ANALITIK
VS
~~NUMERIK~~

Kasus 3

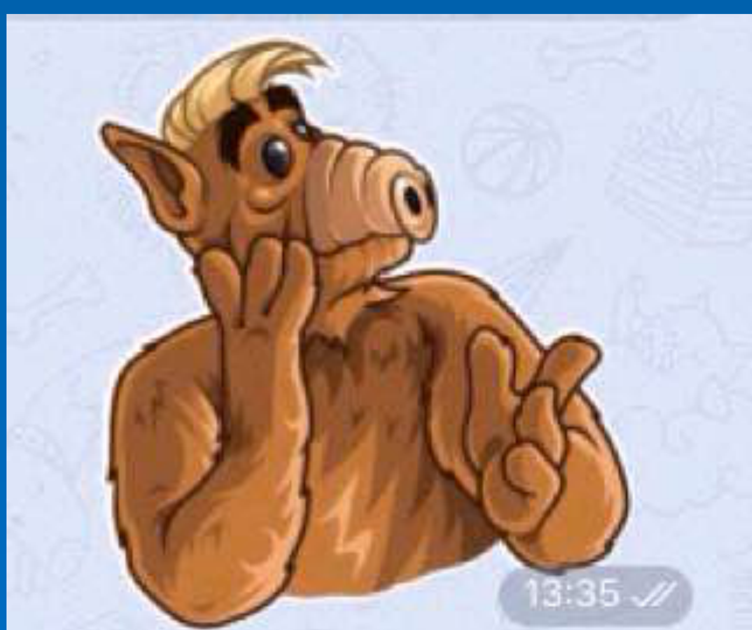
~~Mencari SOLUSI~~
~~Persamaan Differensial~~

Carilah **solusi x(t) dari persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation, ODE*) order pertama:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\{t,x(t)\},\ x(0) = x_0$$

jika diketahui:

$$f\{t,x(t)\} = -\,2x(t),$$
$$x(0) = 10$$



Istilah-istilah:
"order"
"keadaan awal" (*initial condition*)
peubah bebas **t**
peubah terikat **x**
x(t) -------> x

penyelesaian ANALITIK

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

penyelesaian ANALITIK

ANALITIK VS ~~NUMERIK~~

Carilah **solusi x(t) dari persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation, ODE*) order pertama:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\{t,x(t)\},\ x(0) = x_0$$

jika diketahui:

$$f\{t,x(t)\} = -2x(t),$$
$$x(0) = 10$$

Istilah-istilah:
"order"
"keadaan awal" (*initial condition*)
peubah bebas **t**
peubah terikat **x**
x(t) -------> x

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\,x(t)$$

$$\int \frac{dx(t)}{x(t)} = -\int 2\,dt$$

Persamaan Differensial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t), \quad x(0) = 10$$

Dicari: solusi $x(t)$?

$^{a}\log x = b$
$x = a^b$

ANALITIK:

$$\int \frac{dx(t)}{x(t)} = \int -2\,dt = -2\int dt = -2t + C$$

$\int dx = x$
$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}dx$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln x$

$$\ln[x(t)] = -2t + C$$
$$^{e}\log[x(t)] = -2t + C$$
$$x(t) = e^{(-2t+C)} = e^{C}e^{-2t} = Ae^{-2t}$$

$$x(t) = Ae^{-2t} \longrightarrow x(0) = Ae^{0} = A = 10$$

Solusi: $\boxed{x(t) = 10e^{-2t}}$

SOLUSI ANALITIK

Check: $*\ \frac{dx(t)}{dt} = (10)(-2)e^{-2t}$

$$= -2\underbrace{[10e^{-2t}]}_{x(t)} = -2x(t)\ ✓$$

$*$ kondisi awal:

$t = 0 \longrightarrow x(0) = 10e^{0} = 10\ ✓$

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ANALITIK VS ~~NUMERIK~~

Kasus 3 ~~Mencari SOLUSI Persamaan Differensial~~

Carilah **solusi x(t) dari persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation, ODE*) order pertama:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\{t,x(t)\},\ x(0) = x_0$$

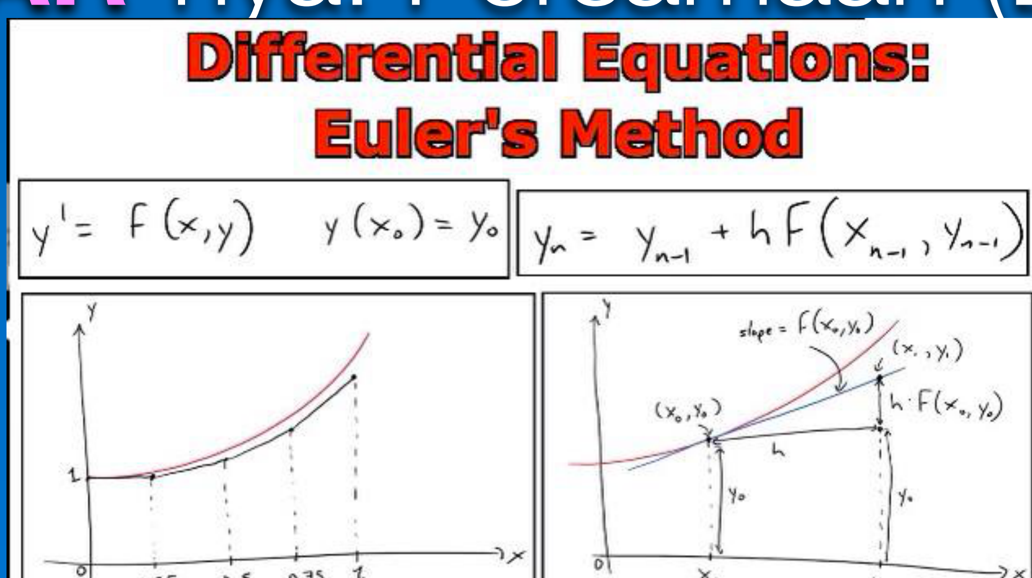
jika diketahui:

$$f\{t,x(t)\} = -2x(t),$$
$$x(0) = 10$$

CONTOH

penyelesaian ~~NUMERIK~~

DASAR-nya: Persamaan (Deret) **EULER**



Deret EULER:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + (1/2)\Delta t^2(d^2x(t)/dt^2)$$
$$+ (1/6)\Delta t^3(d^3x(t)/dt^3) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (1/n!)\Delta t^n(d^nx(t)/dt^n)$$

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ANALITIK VS ~~NUMERIK~~

Kasus 3 ~~Mencari SOLUSI Persamaan Differensial~~

Carilah **solusi x(t) dari persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation, ODE*) order pertama:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\{t,x(t)\},\ x(0) = x_0$$

jika diketahui:

$$f\{t,x(t)\} = -2x(t),$$
$$x(0) = 10$$

Dicontohkan **DUA Metode (KOMPUTASI) NUMERIK**:

Metode EULER Order PERTAMA

dan

KEDUA

CONTOH

penyelesaian ~~NUMERIK~~

Metode Numerik Order Pertama:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + \text{Error}$$

mulai pada t = 0, dihitung:

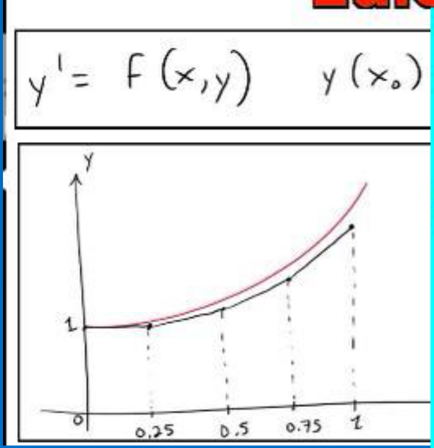
$$x(0 + \Delta t) = x(0) + \Delta t\, f\{t,x(0)\}$$

dan seterusnya......

EULER's METHOD

Differential Equations: Euler's Method

$y' = f(x,y) \quad y(x_0)$



Deret EULER:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + (½)\Delta t^2(d^2x(t)/dt^2)$$
$$+ (1/6)\Delta t^3(d^3x(t)/dt^3) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (1/n!)\Delta t^n(d^nx(t)/dt^n)$$

Metode Numerik Order Kedua:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + (½)(\Delta t)^2(d^2x(t)/dt^2) + \text{Error}$$

$$x'(t) = dx(t)/dt \quad \text{dan} \quad x''(t) = d^2x(t)/dt^2$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t[x'(t)] + (½)(\Delta t)^2[x''(t)]$$

x(t) diketahui,
x'(t) dihitung dari f{t,x(t)},
bagaimana menghitung x''(t)???
ESTIMASI x''(t).............

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ANALITIK VS ~~NUMERIK~~

Kasus 3 ~~Mencari SOLUSI Persamaan Differensial~~

penyelesaian ~~NUMERIK~~

Dicontohkan **DUA** **Metode (KOMPUTASI) NUMERIK**:

Metode EULER Order PERTAMA dan **KEDUA**

Metode Numerik Order Pertama:

$\boxed{x(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t(dx(t)/dt)}$ + Error

mulai pada t = 0, dihitung:

$x(0 + \Delta t) = x(0)+\Delta t\ f\{t,x(0)\}$

dan seterusnya......

Metode Numerik Order Kedua:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t)+\Delta t(dx(t)/dt) \\ &\quad + (½)(\Delta t)^2(d^2x(t)/dt^2) \end{aligned}} + \text{Error}$$

$x'(t)= dx(t)/dt$ dan $x''(t) = d^2x(t)/dt^2$

$x(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t[x'(t)] + (½)(\Delta t)^2[x''(t)]$

x(t) diketahui,
x'(t) dihitung dari f{t,x(t)},
bagaimana menghitung x''(t)???
ESTIMASI x''(t).............

EULER's METHOD

Deret EULER:

$$\boxed{\boxed{x(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t(dx(t)/dt)}+(½)\Delta t^2(d^2x(t)/dt^2)}$$

$$+ (1/6)\Delta t^3(d^3x(t)/dt^3) \ + \ ....$$

$$+ \ (1/n!)\Delta t^n(d^nx(t)/dt^n)$$

bisa diterapkan menggunakan aplikasi ***spreadsheet***, seperti *EXCELL* di *MS-Office*, *CALC* di *Open Office* atau *Libre Office*, *Numbers* di *iOS*, dll.

Buka file:

contoh-numerik.ods atau **contoh-numerik.xls** dari:

https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Metode-Komputasi-Numerik/catatan-kuliah-2020/

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ANALITIK
VS
NUMERIK

Kasus 3 Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

penyelesaian NUMERIK

CONTOH
EULER's METHOD

Metode Numerik Order Pertama:

$$\boxed{x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt)} + \text{Error}$$

mulai pada t = 0, dihitung:

$$x(0 + \Delta t) = x(0) + \Delta t\, f\{t, x(0)\}$$

dan seterusnya.......

Contoh Kasus:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\,x(t),\ \boxed{x(0) = 10}$$

Penyelesaian secara numerik, Order Pertama, $\Delta t = 0.1$:

$$t = 0,\quad x(\Delta t) = x(0) + \Delta t(dx(0)/dt)$$
$$\boxed{= x(0) +}\ \Delta t(-2\,x(0))$$
$$\boxed{= 10 +}\ 0.1(-2)(10)$$
$$x(0.1) = 8$$

$$t = 0.1,\ x(0.2) = x(0.1) + \Delta t(dx(0.1)/dt)$$
$$= 8 + 0.1(-2)(8)$$
$$= 6.4 \qquad \text{dst.}$$

x(0) = 10 diketahui, kemudian dihitung:

x(0,1) = 8, x(0,2) = 6,4, ...dst **SOLUSI**

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

Metode Numerik Order Kedua:

$$x(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t(dx(t)/dt) + (½)(\Delta t)^2(d^2x(t)/dt^2) + \text{Error}$$

$x'(t)= dx(t)/dt$ dan $x''(t) = d^2x(t)/dt^2$

$$x(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t[x'(t)] + (½)(\Delta t)^2[x''(t)]$$

$x(t)$ diketahui,
$x'(t)$ dihitung dari $f\{t,x(t)\}$,
bagaimana menghitung $x''(t)$???
ESTIMASI $x''(t)$..........

ANALITIK VS NUMERIK

penyelesaian NUMERIK

ESTIMASI $x''(t)$.............

"FORWARD DIFFERENCE"

$x(t)$ diketahui,
$x'(t)$ dihitung dari $f\{t,x(t)\}$,
dengan metode order pertama,
dihitung estimasi $x(t+\Delta t)$:

$$Ex(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t[x'(t)]$$

lalu dihitung estimasi $x'(t+\Delta t)$:

$$Ex'(t + \Delta t) = f\{t+\Delta t,Ex(t+\Delta t)\}$$

dengan demikian ESTIMASI $x''(t)$ dapat dihitung:

$$Ex''(t) = [Ex'(t+\Delta t) – x'(t)]/\Delta t$$

CONTOH
EULER's METHOD

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ESTIMASI x''(t)..............

"FORWARD DIFFERENCE"

x(t) diketahui,
x'(t) dihitung dari f{t,x(t)},
dengan metode order pertama,
dihitung estimasi $x(t+\Delta t)$:

$$Ex(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t[x'(t)]$$

lalu dihitung estimasi $x'(t+\Delta t)$:

$$Ex'(t + \Delta t) = f\{t+\Delta t, Ex(t+\Delta t)\}$$

dengan demikian ESTIMASI x"(t) dapat dihitung:

$$Ex''(t) = [Ex'(t+\Delta t) - x'(t)]/\Delta t$$

penyelesaian ~~NUMERIK~~

Setelah ESTIMASI x''(t) diketahui, maka selanjutnya dapat dihitung $x(t + \Delta t)$:

$$x(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t[x'(t)] + (½)(\Delta t)^2[Ex''(t)]$$

ESTIMASI x"(t):

$$Ex''(t) = [Ex'(t+\Delta t) - x'(t)]/\Delta t$$

sehingga:

$$x(t + \Delta t) = x(t)+\Delta t[x'(t)] + (½)(\Delta t)^2[Ex'(t+\Delta t) - x'(t)]/\Delta t$$

jadi:

$$x(t + \Delta t) = x(t)+(½\Delta t)[x'(t) + Ex'(t+\Delta t)]$$

dengan $Ex'(t+\Delta t) = f\{t+\Delta t, Ex(t+\Delta t)\}$

dan $Ex(t+\Delta t) = x(t)+\Delta t[x'(t)]$

ANALITIK VS ~~NUMERIK~~

CONTOH

EULER's METHOD

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

Kasus 3

Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

Second Order Numerical Method

Metode Numerik Order Kedua (lanjutan):

Kembali ke contoh kasus:

$$x'(t) = f\{t, x(t)\} = -2\,x(t),\ x(0) = 10$$

Misalnya $\Delta t = 0{,}1$

Pada $t = 0$:

$x'(0) = -2\,x(0) = (-2)*10 = -20$

$Ex(0+\Delta t) = x(0)+\Delta t[x'(0)] = 10 + (0{,}1)(-20)$

$Ex(0{,}1) = 8$

$Ex'(0+\Delta t) = f\{0+\Delta t, Ex(0+\Delta t)\} = -2\,Ex(\Delta t)$

$Ex'(0{,}1) = -16$

$x(t+\Delta t) = x(t)+(½\Delta t)[x'(t) + Ex'(t+\Delta t)]$

$x(0{,}1) = x(0)+(½)(0{,}1))[x'(0) + Ex'(0{,}1)]$

$= 10 + (½)(0{,}1))[(-20) + (-16)]$

$= 8{,}2$

penyelesaian NUMERIK

Metode (KOMPUTASI) NUMERIK:

Metode EULER Order KEDUA

Pada $t = 0{,}1$:

$x'(0{,}1) = -2\,x(0{,}1) = (-2)*8{,}2 = -16{,}4$

$Ex(0{,}1+\Delta t) = x(0{,}1)+\Delta t[x'(0{,}1)]$

$= 8{,}2 + (0{,}1)(-16{,}4)$

$Ex(0{,}2) = 6{,}56$

$Ex'(0{,}1+\Delta t) = f\{0{,}1+\Delta t, Ex(0{,}1+\Delta t)\}$

$= -2\,Ex(0{,}2) = -2\,(6{,}56)$

$Ex'(0{,}2) = -13{,}12$

$x(t+\Delta t) = x(t)+(½\Delta t)[x'(t) + Ex'(t+\Delta t)]$

$x(0{,}2) = x(0{,}1)+(½)(0{,}1))[x'(0{,}1) + Ex'(0{,}2)]$

$= 8{,}2 + (½)(0{,}1)[(-16{,}4) + (-13{,}12)]$

$= 6{,}274$

dan seterusnya ....

SOLUSI: *x(0) = 10 diketahui, kemudian dihitung:*

x(0,1) = 8,2, x(0,2) = 6,274, ...dst

ANALITIK VS NUMERIK

KASUS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ANALITIK VS NUMERIK

penyelesaian ANALITIK

Contoh Kasus:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\,x(t),\; x(0) = 10$$

SOLUSI ANALITIK:

Solusi : $\boxed{x(t) = 10e^{-2t}}$

SOLUSI "*exact*":

x(0) = 10 diketahui, kemudian dihitung:

$x(0{,}1) = 10\,e^{-2(0{,}1)} = 8{,}187\ldots$, $x(0{,}2) = 10\,e^{-2(0{,}2)} = 6{,}703\ldots$, …..dst

penyelesaian NUMERIK

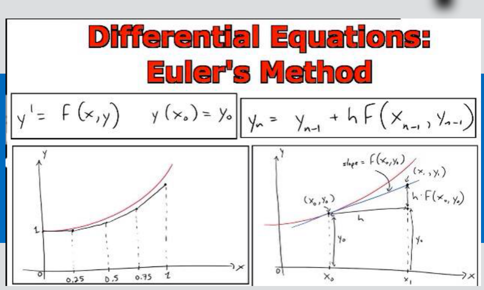
Perbandingan **DUA Metode (KOMPUTASI) NUMERIK**:
Metode EULER
Order PERTAMA dan **KEDUA**

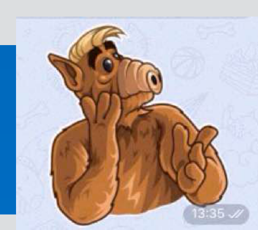
Metode (KOMPUTASI) NUMERIK:
Metode EULER Order PERTAMA

SOLUSI (estimasi):

x(0) = 10 diketahui, kemudian dihitung:

x(0,1) = 8, x(0,2) = 6,4, …..dst



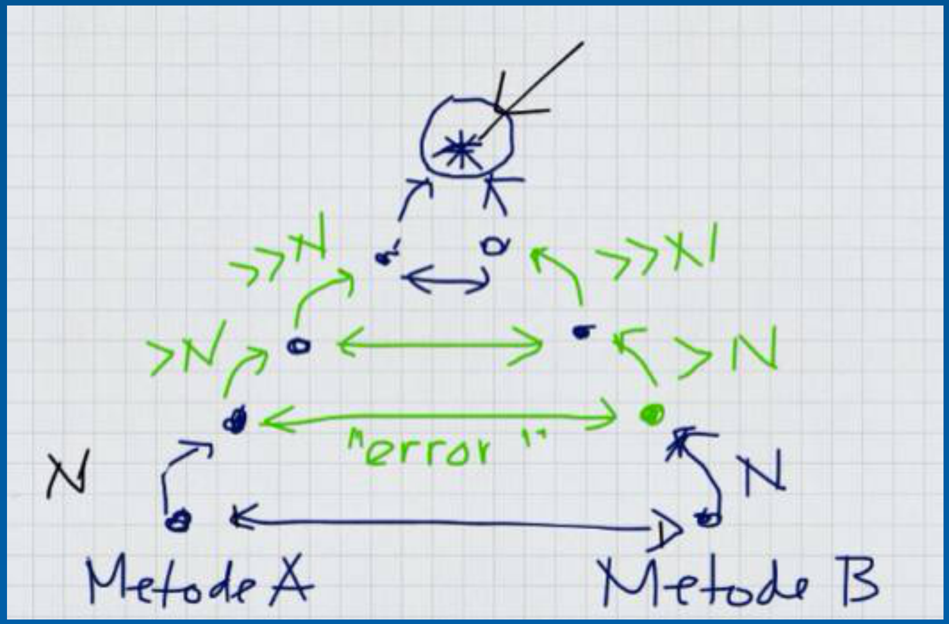


Metode (KOMPUTASI) NUMERIK:
Metode EULER Order KEDUA

SOLUSI (estimasi):

x(0) = 10 diketahui, kemudian dihitung:

x(0,1) = 8,2, x(0,2) = 6,274, …..dst



penyelesaian NUMERIK

UPAYA BAKU MEMPERKECIL ERROR

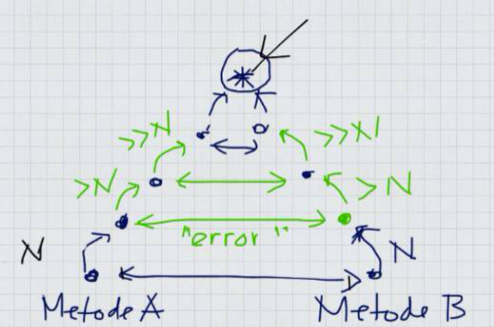
UPAYA BAKU MEMPERKECIL ERROR

Dalam berbagai metode NUMERIK ada setidaknya **2 (dua)** langkah baku untuk memperkecil galat (*ERROR*), yaitu:

1. **Memperbanyak interval N atau memperkecil Δx**

2. **Memperbaiki metode**

Kebanyakan program numerik menggunakan sedikitnya 2 (dua) macam metode yang berbeda, menggunakan selisih hasil keduanya sebagai estimasi *ERROR*, dan terus memperbanyak N/memperkecil Δx sampai selisih hasil keduanya lebih kecil dari suatu angka yang masih ditolerir.



penyelesaian NUMERIK

UPAYA BAKU MEMPERKECIL ERROR

UPAYA BAKU MEMPERKECIL ERROR

ANALITIK VS NUMERIK

Kasus 3

Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

ERROR dan TOLERANSI

Pada umumnya Metode Numerik digunakan ketika Solusi Analitik **TIDAK DIKETAHUI**, dengan demikian **ERROR** yang sesungguhnya juga tidak diketahui. Oleh sebab itu biasa diterapkan **ALGORITMA** sebagai berikut:

1. Tetapkan suatu batas toleransi, ε, sebuah angka yang cukup kecil, misalnya $\varepsilon = 10^{-6}$.
2. Tetapkan *step-size* awal:

$$\Delta t = t_a / N$$

t_a = t akhir perhitungan

N = jumlah interval

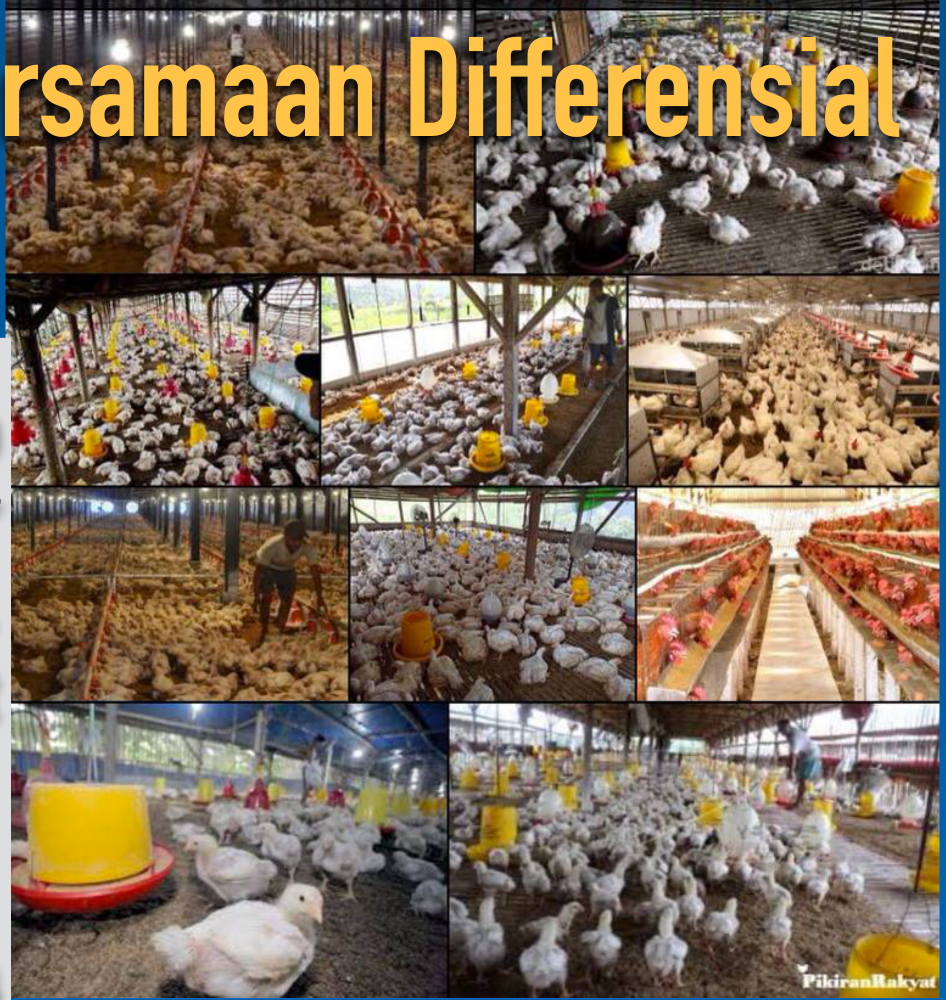
3. Hitung solusi untuk $t = \Delta t$ dengan suatu metode numerik, misalnya **Metode A**, sehingga diperoleh $x_A(\Delta t)$
4. Hitung lagi solusi untuk dengan metode numerik lain yang **lebih baik** dari **Metode A**, misalnya **Metode B**, sehingga diperoleh $x_B(\Delta t)$.
5. Hitung selisih $E_{est} = |x_B(\Delta t) - x_A(\Delta t)|$ sebagai **estimasi ERROR**.
6. Jika $E_{est} > \varepsilon$, maka *step-size* diperkecil, yang baru = $\Delta t / n$, **n** = bilangan bulat **> 1**, misalnya 2, 10, dst., lalu kembali ke **langkah 3**

Catatan: Agar tidak terjadi ***infinite loop*** dari **langkah 3** sampai **langkah 6**, maka *step-size* harus dibatasi jangan lebih kecil dari ε. Jika terjadi demikian berarti toleransi-nya terlalu kecil. Program gagal, kembali ke **langkah 1**.

6. Jika $E_{est} \leq \varepsilon$, berarti $x_B(\Delta t)$ adalah solusi untuk $t = \Delta t$ maka lanjut hitung solusi untuk $t = 2\Delta t$ dengan kembali menggunakan langkah **3** tanpa mengubah Δt.
7. Begitu seterusnya diulangi sampai $t = t_a$.

ANALITIK VS ~~NUMERIK~~

TUGAS 3: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial
Kasus: PETERNAKAN AYAM



Suatu peternakan ayam yang memiliki **10.000** ekor ayam peliharaan, tiba2 terkena musibah penyakit menular yang membunuh sekitar **5%** populasi ayam setiap hari. Laju kematian (*mortality rate*) ayam setiap hari dapat dinyatakan dengan **PERSAMAAN DIFFERENSIAL**:

$$dx(h)/dh = 0{,}05*(10.000 - x(h)),\ x(0) = 0$$

dengan **x(h)** = akumulasi jumlah ayam yang tewas setelah hari ke-**h**.

(A) (Gunakan **KALKULUS**) Tentukan **SOLUSI ANALITIK** dari **x(h)**, lalu tentukan (secara *exact*) pada hari keberapa populasi ayam tinggal **5.000** ekor (**50%**).

(B) Dengan **Metode EULER Order PERTAMA**, **Δh = 1**, tentukan estimasi pada hari keberapa populasi ayam tinggal **5.000** ekor (**50%**).

(C) Dengan **Metode EULER Order KEDUA**, **Δh = 1**, tentukan estimasi pada hari keberapa populasi ayam tinggal **5.000** ekor (**50%**).

(D) Dengan menggunakan **ALGORITMA DUA Metode (KOMPUTASI) NUMERIK** sesuai konsep "**ERROR dan TOLERANSI**" yang dijelaskan pada *slide* sebelumnya, susunlah **PROGRAM** untuk mencari estimasi numerik yang lebih akurat dari hari keberapa populasi ayam tinggal **5.000** ekor (**50%**).

MODUL PEMBELAJARAN (SELESAI)

- MODUL 0: PENGANTAR KULIAH
- MODUL 1A: MOTIVASI
- MODUL 1B: PEMODELAN SISTEM
- MODUL 2: ANALITIK vs NUMERIK
  - Sub-MODUL 2A: Mencari AKAR Persamaan
  - Sub-MODUL 2B: Mencari LUAS Bidang
  - Sub-MODUL 2C: Mencari SOLUSI Persamaan Differensial

Tugas 1
Tugas 2
Tugas 3

UJIAN FINAL

SELAMAT BELAJAR

Semoga SUKSES meraih PRESTASI!