

MATERI KULIAH PEMODELAN dan METODE NUMERIK



Administrasi Perkuliahan:

Bagian I : PEMODELAN NUMERIK

Pekan 1 s/d 8 oleh RHZ

Penilaian: Tugas-tugas
dan Ujian Final.

Referensi:

- 1. Sandi Setiawan “SIMULASI”
(Bab 1 s/d 4)
- 2. Geoffrey Gordon, “System
Simulation” (Chapter 1 s/d 5)

Bagian II : METODE NUMERIK

Pekan 9 s/d 16 oleh:

Dr.Eng.Syafaruddin, ST, M.Eng.

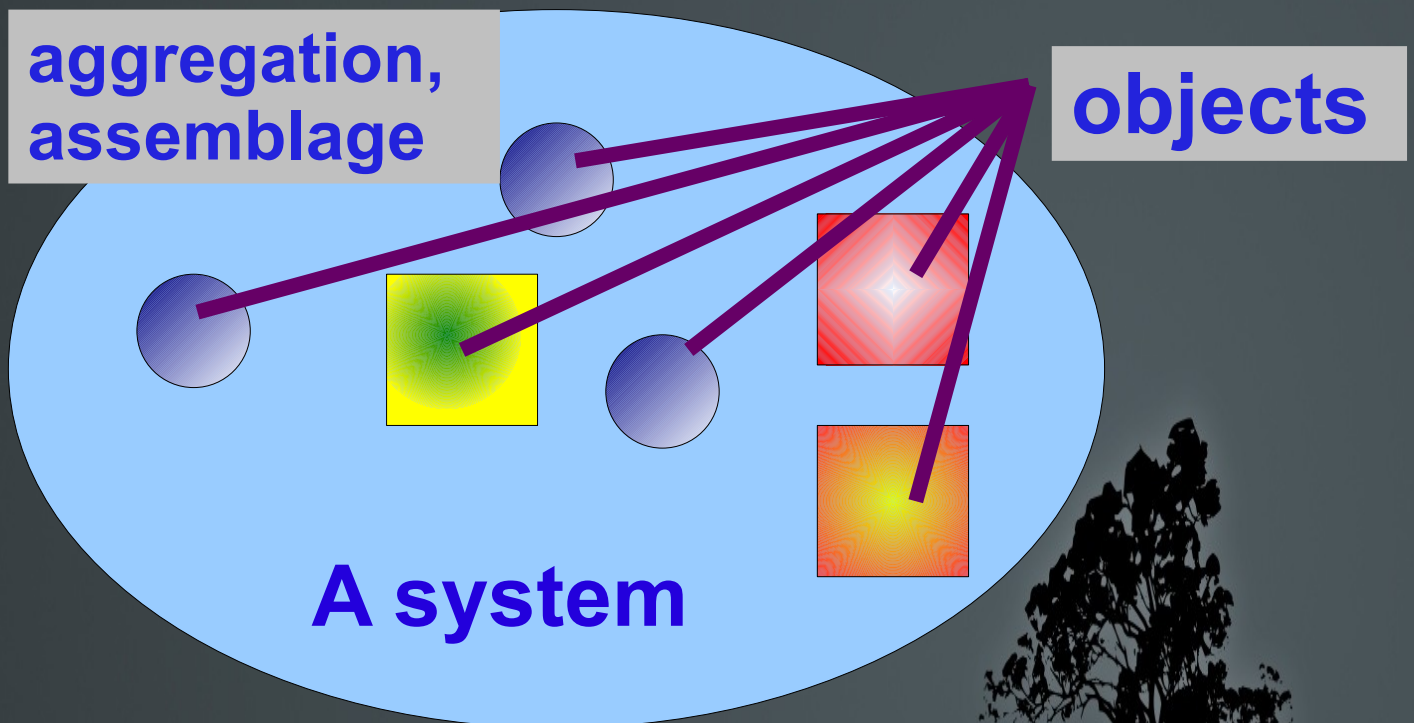


KONSEP SISTEM

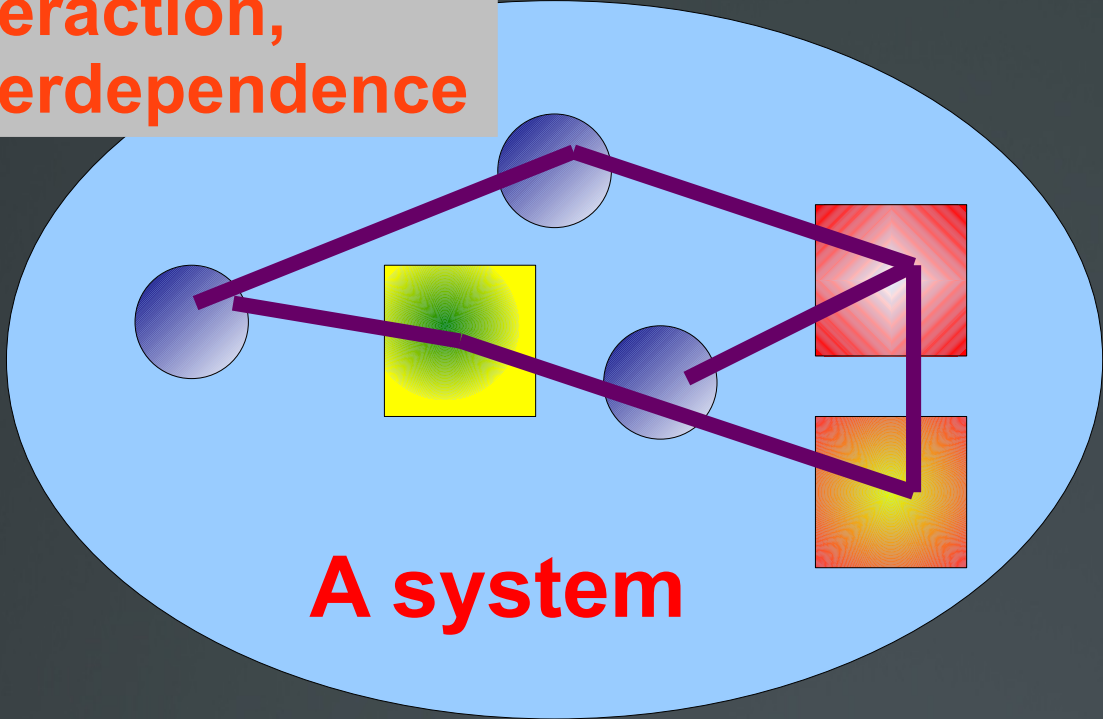
Geoffrey Gordon [1989]:

A system is defined as an aggregation or assemblage of objects joined in some regular interaction or interdependence

A system → **only ONE system**
objects → **more than ONE**



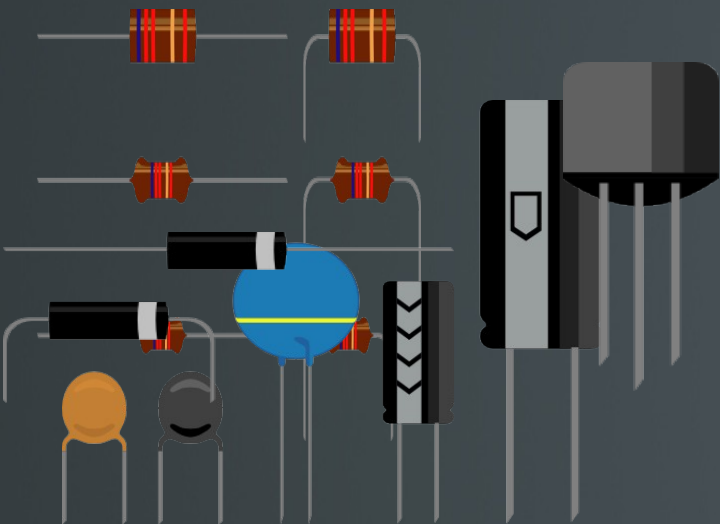
**Interaction,
interdependence**



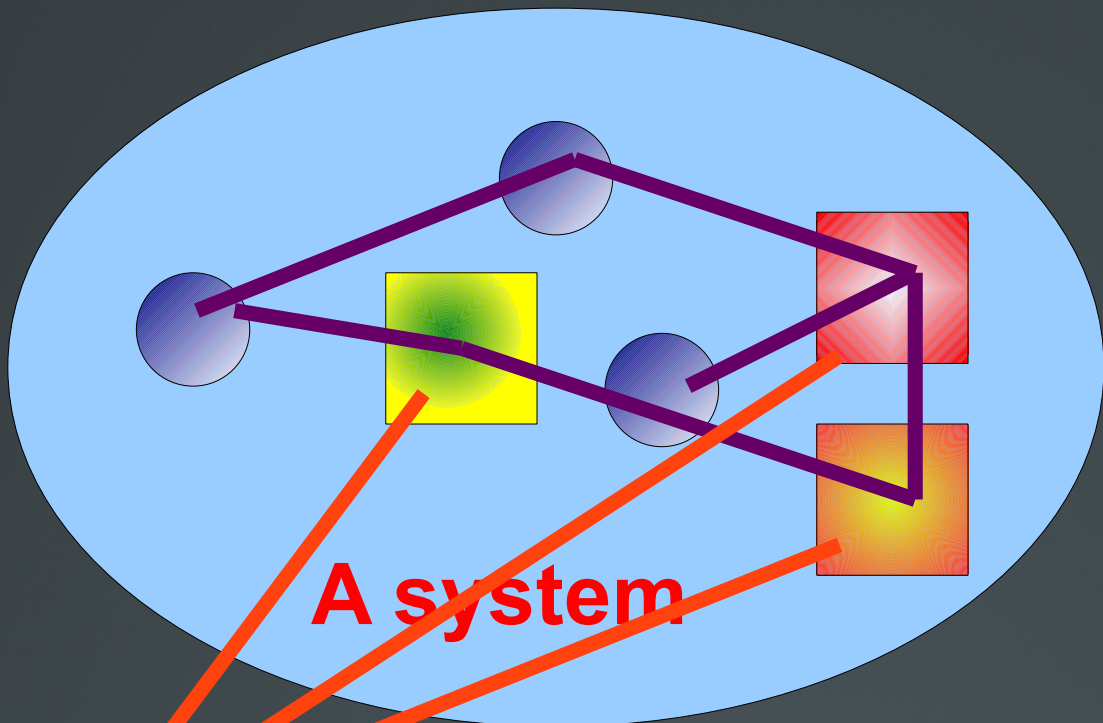
Contoh:

Ibu-ibu di pasar → bukan sistem

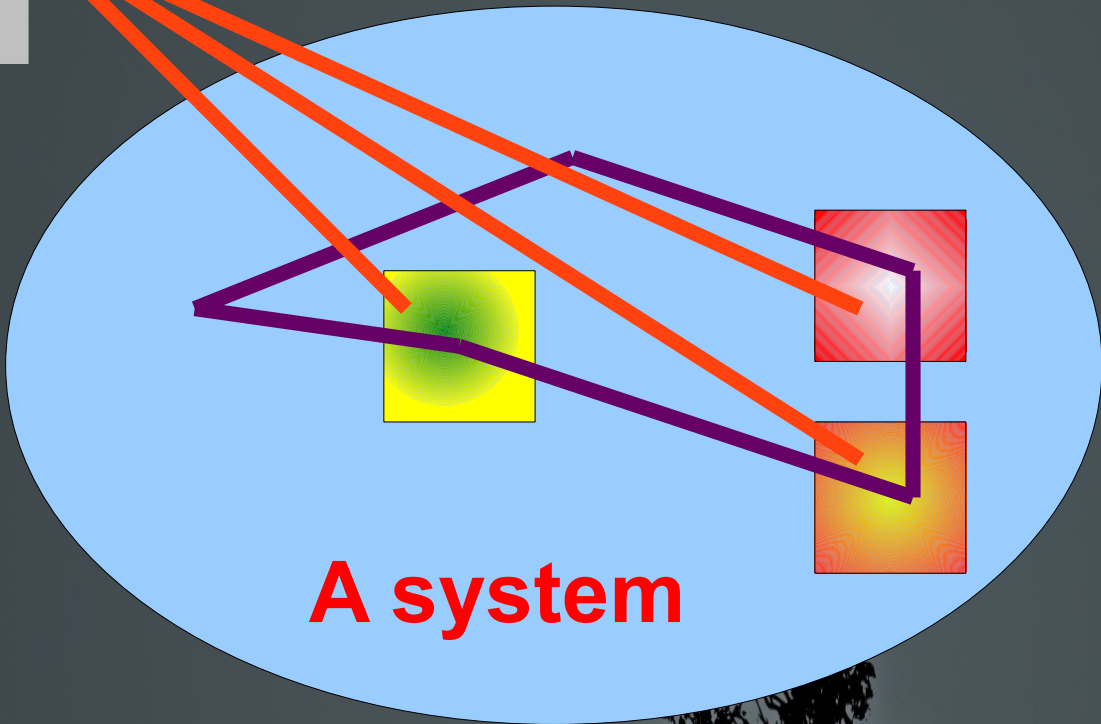
Ibu-ibu arisan → sistem



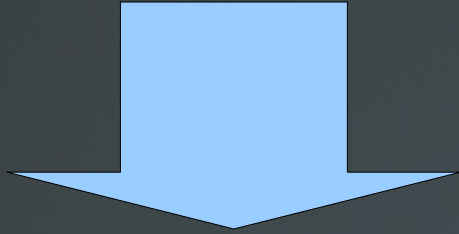
**Kumpulan
komponen
elektronika ini
bukan sistem**



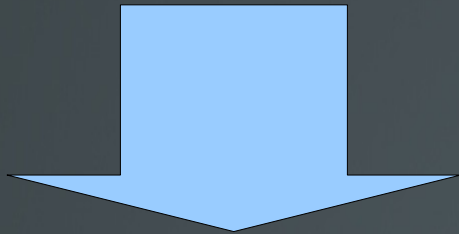
**ENTITAS
(entity)**



SISTEM



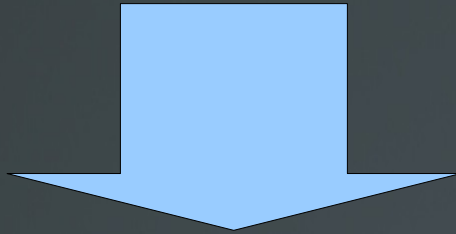
ENTITAS, ATRIBUT, KEGIATAN
(entity, attribute, activity)



KEADAAN SISTEM
(state of the system)

Contoh:

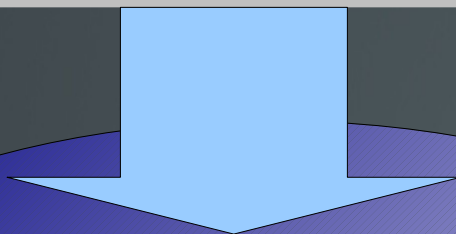
**SISTEM LALU-LINTAS
ANGKUTAN JALAN RAYA**



ENTITAS: Mobil, kendaraan roda empat

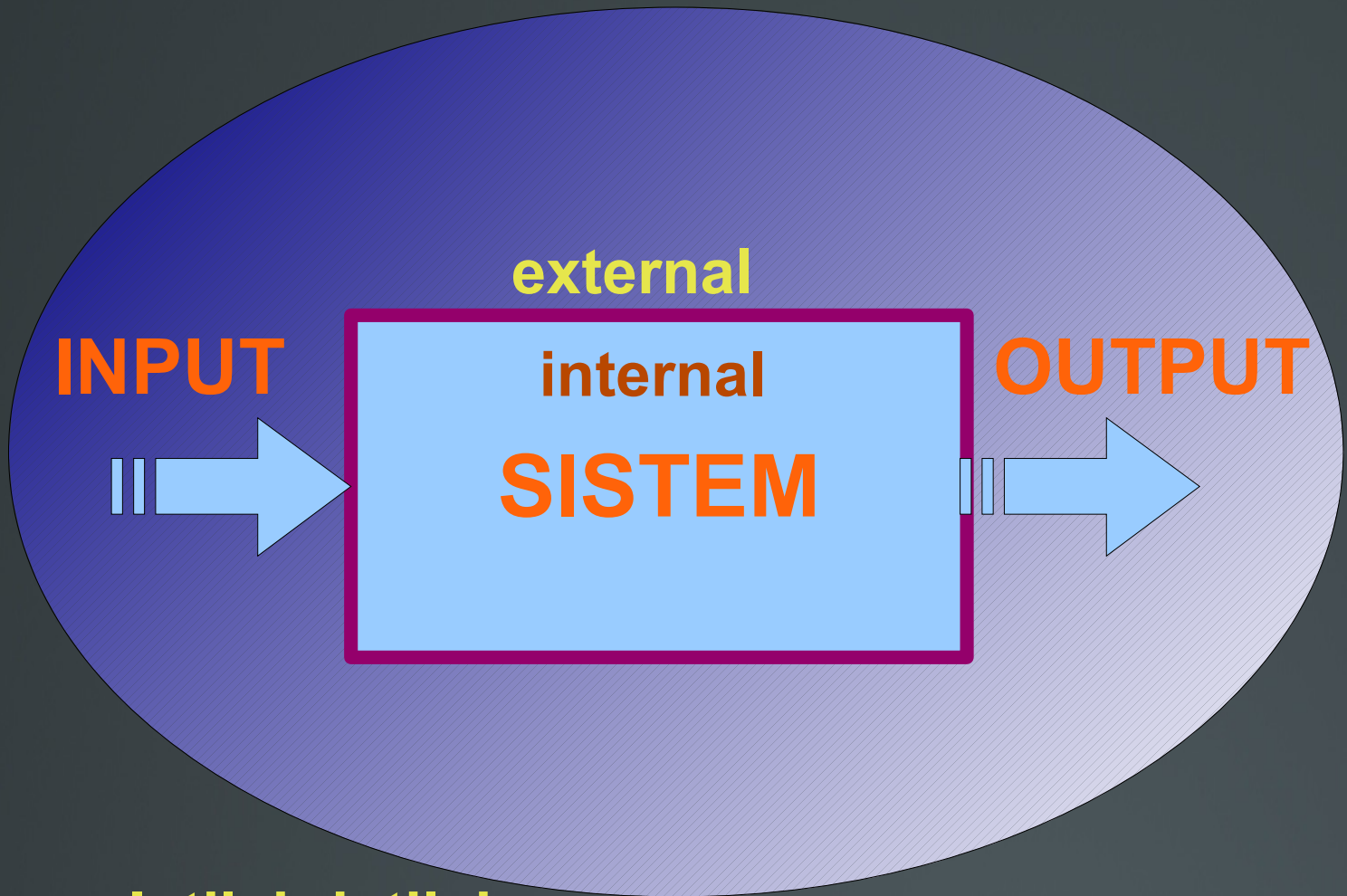
ATRIBUT: Kecepatan hampir nol

KEGIATAN: Dikendarai (bukan sedang parkir, menunggu penumpang, diperbaiki, dst.)



**KEADAAN SISTEM
MACET TOTAL !!!**

LINGKUNGAN SISTEM



Istilah-istilah:

- Gangguan (*disturbance*)
- Derau (*noise*)
- Aktivitas exogen (*exogenous*)
- Aktivitas endogen (*endogenous*)
- Sistem TERTUTUP/TERBUKA

SISTEM DETERMINISTIK, STOKHASTIK dan KHAOTIK

Deterministik:

- Masukan memastikan luaran

Stokhastik:

- Masukan memastikan peluang luaran
- Berbasis PROBABILISTIK dan STATISTIK
- Peubah acak (*random variables*)
- Hitung PELUANG

Contoh-contoh:

- Perhitungan ARUS dan TEGANGAN
- RU'YAT dan HISAB

Bukan deterministik, karena luaran tidak dapat dipastikan, bukan pula stokhastik, karena peluangnya pun tak tertentu:

SISTEM KHAOTIK

Contoh-contoh:

“The butterfly effect”



SISTEM KONTINYU dan SISTEM DISKRIT

Time Continuous:

- Isyarat “malar”, terdefinisi pada setiap titik waktu. Contoh: isyarat suara, suhu ruangan, berbagai besaran fisik dalam proses, dll.

Discrete Time:

- Isyarat “digital”, sekuensial, *clock*
- Tidak terdefinisi pada waktu di antara pencuplikan (*sampling*)
- Data tercuplik (*sampled-data*)

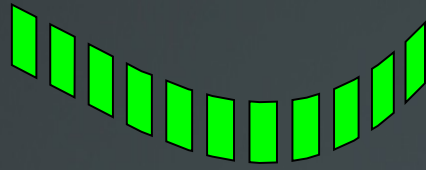
Discrete (Event) Systems:

- Proses dalam pabrikasi
- *Sequential Events*
- Jaringan PETRI (*Petri Net*)

Contoh-contoh:



Next



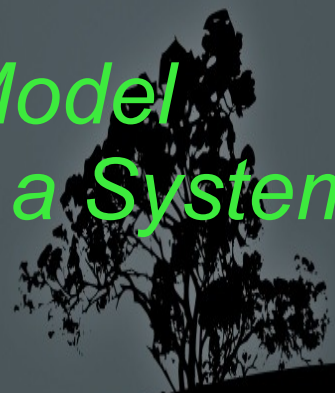
PEMODELAN SYSTEM *System* *Modeling*

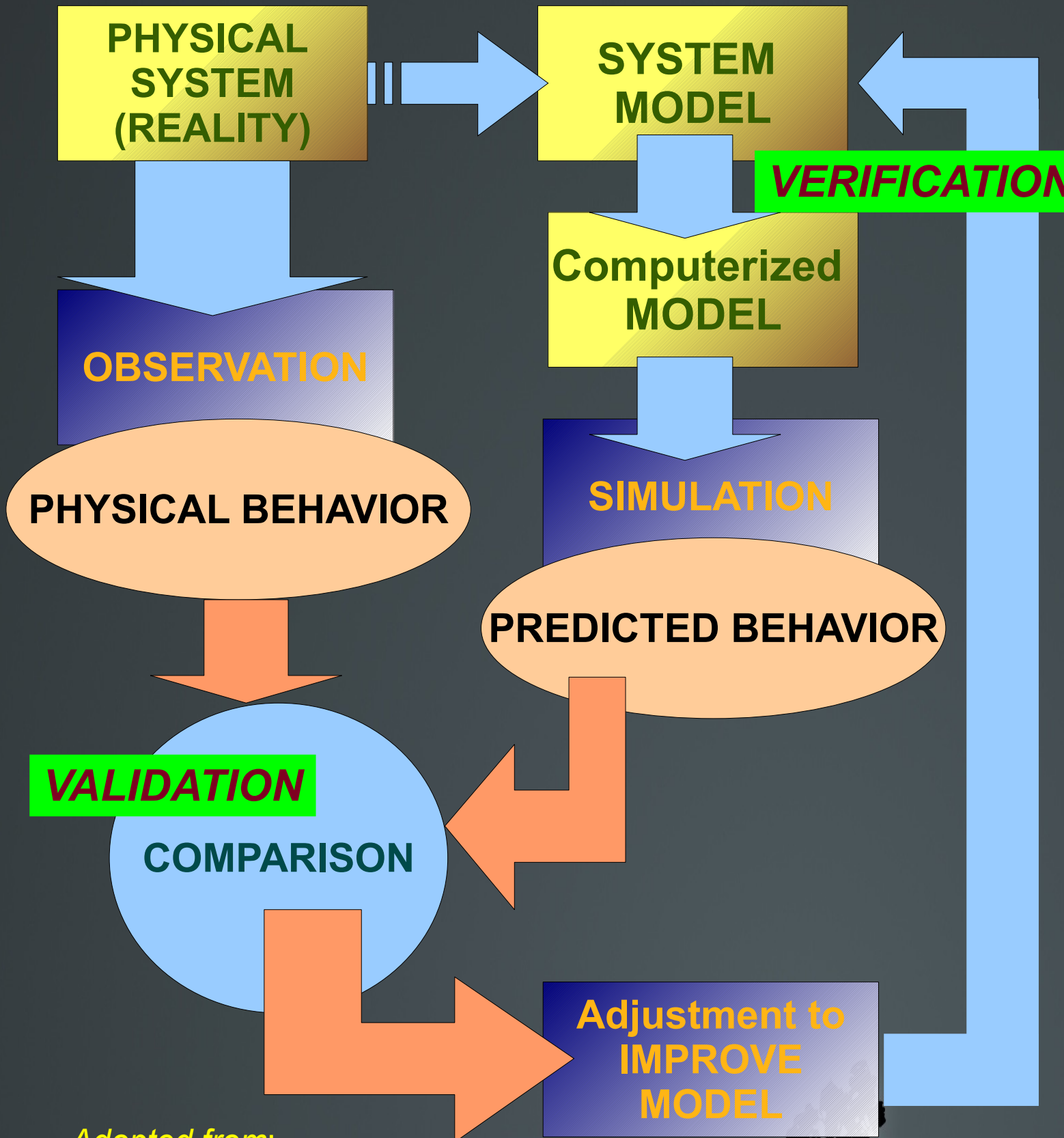


sebuah CONTOH **PEMODELAN SISTEM**

Pemodelan Sistem dengan KOMPUTER

*(How to build
credible Computerized Model
.....of a System)*





Adopted from:

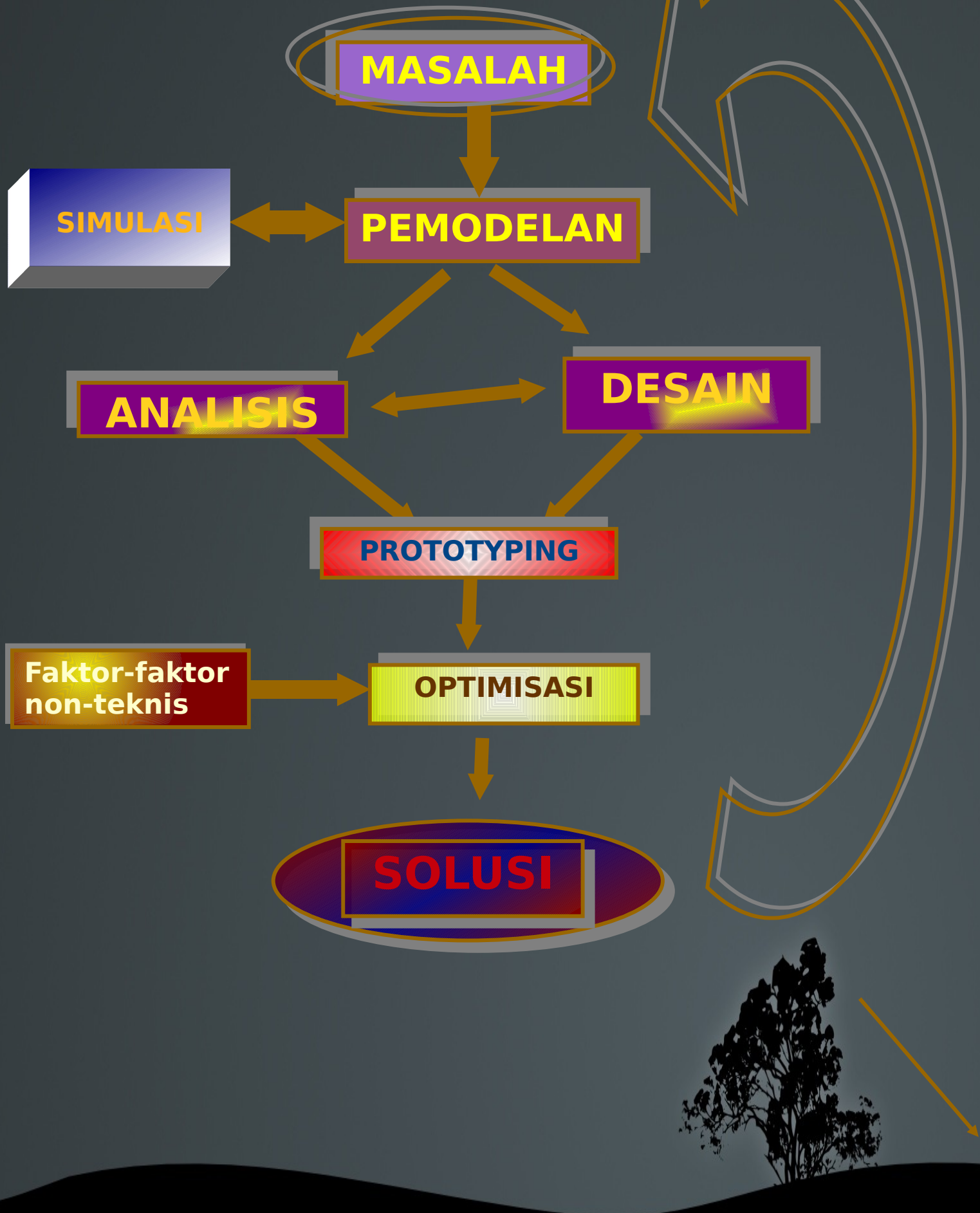
Kheir, Naim A., (ed), [1988],

"Systems Modeling and Computer Simulation"
, Marcel Dekker, Inc. , NY, page 6

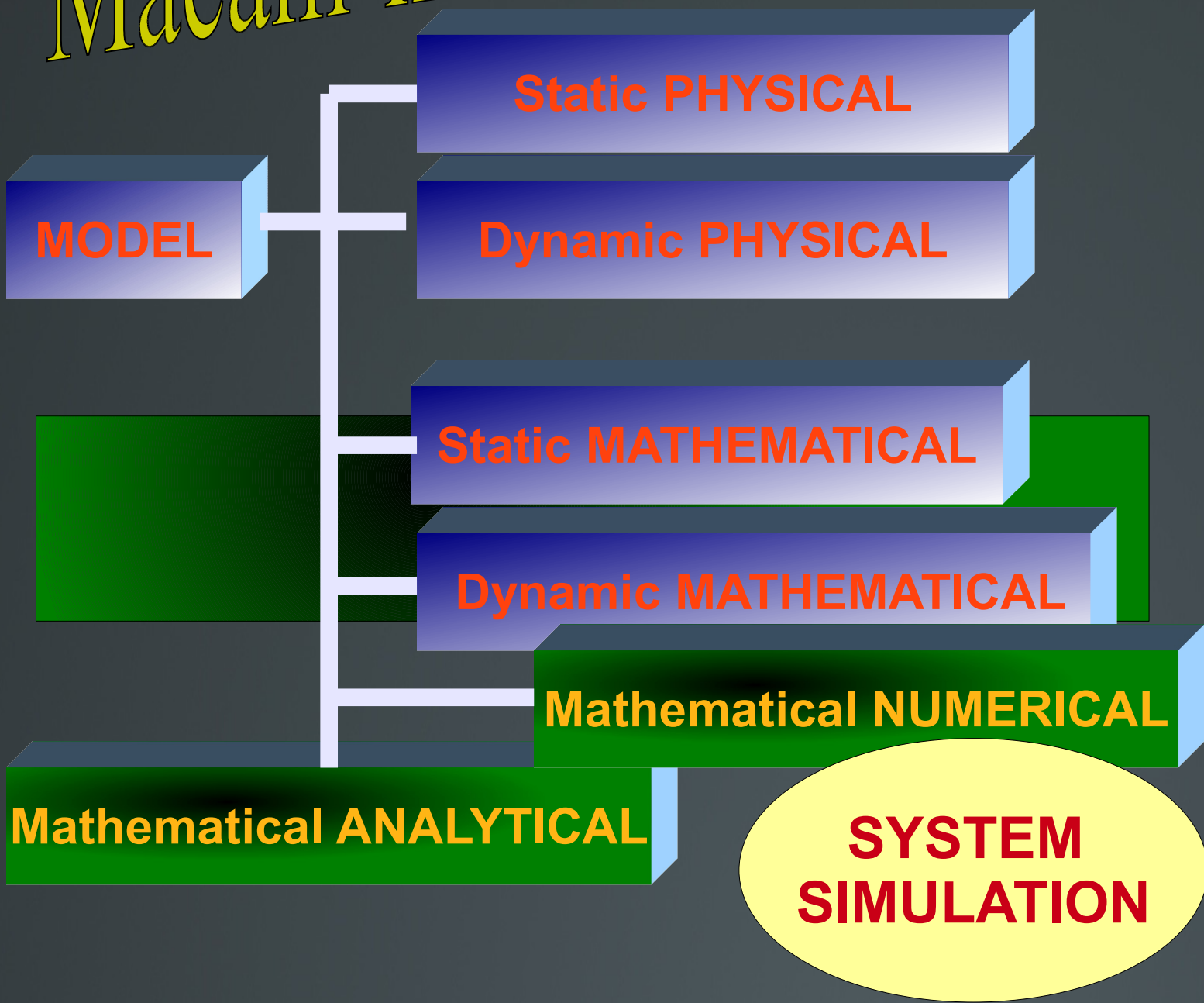
URGENSI atau PENTINGNYA PEMODELAN SISTEM

- Dalam perancangan sistem, sistem yang akan dibangun belum ada (baru ada secara “hipotetis”). Untuk membuat prediksi, harus dibuat model sistem tersebut.
- Seandainya pun ada sistem yang sebenarnya, sering sangat mahal (biaya dan waktu) atau sangat berisiko tinggi bahkan berbahaya untuk ber-eksperimen dengan sistem yang sesungguhnya.
- Untuk suatu studi dalam bidang tertentu, tidak perlu keseluruhan detail sistem dipelajari, perlu penyederhanaan dengan model.
- Perlu meng-identifikasi ENTITAS, ATRIBUT dan AKTIVITAS yang relevan dalam sistem
- Pemodelan = perumusan masalah, langkah awal dalam *engineering*

Engineering Education.....



Macam-macam MODEL



Adopted from:

Gordon, Geoffrey, [1989], "System Simulation" ,
PHI, New Delhi, page 9

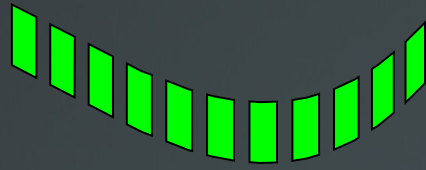


CONTOH

Macam-macam MODEL

- **Model FISIK-STATIK**: model ikonik, miniatur pesawat terbang (yang tidak terbang), maket gedung, dll.
- **Model FISIK-DINAMIK**: terowongan angin, sistem pegas-massa-redaman, *aero-modeling* (model pesawat yang bisa terbang), dll.
- **Model MATEMATIK-STATIK**: (tanpa peubah waktu t atau pun bentuk sekuensial k), model ekonomi (*supply and demand*).
- **Model MATEMATIK-DINAMIK**: (dengan peubah waktu t atau pun bentuk sekuensial k), persamaan differensial, bagan kotak, model nisbah-alih (*Transfer Function*), model ruang-keadaan (*State-Space*), dll.
- Contoh: **SISTEM SUSPENSİ KENDARAAN BERMOTOR**
- Next: **NUMERIK vs ANALITIK**

Next



ANALITIK VS NUMERIK



Kasus 1

~~Mencari AKAR~~ ~~Persamaan~~

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan:

$$f(x) = x^2 - x - 6 = 0$$

penyelesaian ANALITIK

I. Rumus ABC:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x_{1,2} =$$

$$2a$$

Jawaban (exact):

$$x_1 = +3 \text{ dan } x_2 = -2$$

Kasus 1

~~Mencari AKAR~~ ~~Persamaan~~

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan:

$$f(x) = x^2 - x - 6 = 0$$

penyelesaian ANALITIK

II. Uraian atas faktor-faktor:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

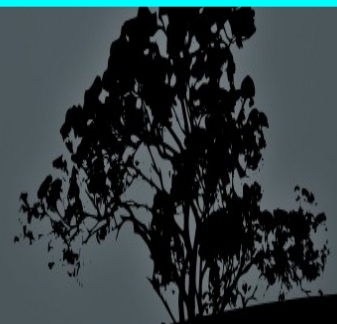
$$x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Jawaban (exact):

$$x_1 = +3 \text{ dan } x_2 = -2$$



CIRI-CIRI

penyelesaian ANALITIK

1. Masalah harus memenuhi format tertentu.
2. Menggunakan rumus matematik tertentu atau prosedur “baku” yang berlaku umum dan bersifat tetap.
3. Jawaban jawaban yang diperoleh adalah jawaban *exact*
4. Memerlukan “kecerdasan” atau pengetahuan khusus

Bagaimana jika kasus-nya:

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan:

$$f(x) = x^3 - x - 6 = 0$$

atau

$$f(x) = x^{2.5} - x - 6 = 0 \text{ ???}$$

Kasus 1

~~Mencari AKAR~~ ~~Persamaan~~

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan:

$$f(x) = x^2 - x - 6 = 0$$

penyelesaian

~~NUMERIK~~

Contoh: Metode **BISECTION**

(*Newton's Secant Method*)

Untuk sembarang:

$$f(x) = 0$$

(1) Tentukan sembarang a sehingga

$$f(a) < 0$$

(2) Tentukan sembarang b sehingga

$$f(b) > 0$$

(3) Hitung $c = (a + b)/2$ dan $f(c)$

(4) Jika $f(c) < 0$, c mengganti a

(5) Jika $f(c) > 0$, c mengganti b

(6) Kembali ke (3) dan seterusnya

Tugas 1

~~Mencari AKAR~~ ~~Persamaan~~

Susunlah **PROGRAM KOMPUTER** (bahasa pemrograman apa saja) untuk mencari nilai x yang memenuhi persamaan:

$$f(x) = 0$$

dengan

penyelesaian

~~NUMERIK~~

menggunakan Metode **BISECTION**
(*Newton's Secant Method*)

(1) Ujicobalah program anda untuk

$$f(x) = x^2 - x - 6 = 0$$

(2) Setelah teruji benar, gunakan program anda untuk

(a) $f(x) = x^3 - x - 6 = 0$

(b) $f(x) = x^{2.5} - x - 6 = 0$

LANJUT.....:

Tugas 1

~~Mencari AKAR~~ ~~Persamaan~~

Susunlah **PROGRAM KOMPUTER** (bahasa pemrograman apa saja) untuk mencari nilai x yang memenuhi persamaan:

$$f(x) = 0$$

dengan

penyelesaian

~~NUMERIK~~

..... **LANJUTAN:**

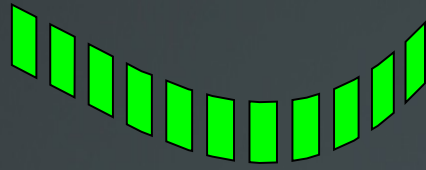
(3) Selanjutnya, gunakan pula program anda untuk

$$f(x) = x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

dengan **ABCDE** diambil dari angka-angka bukan nol tanggal lahir anda
HH-BB-19TT

(4) Dari pengalaman di atas, uraikan dan diskusikan **CIRI-CIRI** penyelesaian **NUMERIK** bila dibandingkan dengan penyelesaian **ANALITIK**.

Next



ANALITIK VS NUMERIK

Kasus 2

~~Mencari LUAS~~
~~Bidang~~



Kasus 2

~~Mencari LUAS~~ ~~Bidang~~

Carilah luas bidang antara $f(x)$ dan sumbu x pada interval antara $x = -5$ dan $x = +5$

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

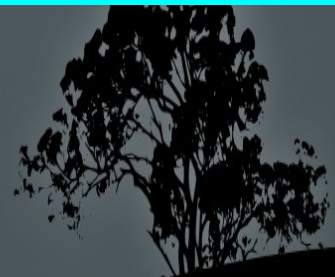
penyelesaian

ANALITIK

Integral batas:

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{+5} f(x) dx &= \int_{-5}^{+5} (x^2 - x - 6) dx \\ &= (1/3)x^3 - (1/2)x^2 - 6x \bigg|_{-5}^{+5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= [(1/3)(+5)^3 - (1/2)(+5)^2 - 6(+5)] - \\ &[(1/3)(-5)^3 - (1/2)(-5)^2 - 6(-5)] = 23,333..\end{aligned}$$



Kasus 2

~~Mencari LUAS~~ ~~Bidang~~

Carilah luas bidang antara (x) dan sumbu x pada interval antara $x = -5$ dan $x = +5$

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

penyelesaian

ANALITIK

Integral batas:

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{+5} f(x) dx &= \int_{-5}^{+5} (x^2 - x - 6) dx \\ &= (1/3)x^3 - (1/2)x^2 - 6x \bigg|_{-5}^{+5} \\ &= [(31,5) + (20,83) + (11,67)] = 65\end{aligned}$$

Jadi luas bidang 23,33 atau 65 ???

KELEMAHAN

penyelesaian ANALITIK

~~Mencari LUAS-Bidang~~

1. Integral batas tidak selalu sama dengan luas bidang (integral batas bisa negatif atau positif, luas bidang selalu positif)
2. Tidak semua fungsi mudah di-integral-kan

Kasus 2

~~Mencari LUAS~~ ~~Bidang~~

Carilah luas bidang antara $f(x)$ dan sumbu x pada interval antara $x = -5$ dan $x = +5$

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

penyelesaian

~~NUMERIK~~

Contoh: Metode **4-PERSEGI PANJANG**
dan Metode **TRAPESIUM**

Untuk mencari luas bidang antara sembarang $f(x)$ dan sumbu x pada interval antara $x = a$ dan $x = b$:

1. Interval $a \leq x \leq b$ dibagi menjadi N sub-interval:

$$\Delta x = (b - a)/N$$

$$x_i = a + i\Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$x_N = b$$

LANJUTKAN

Kasus 2

~~Mencari LUAS Bidang~~

Carilah luas bidang antara (x) dan sumbu x pada interval antara $x = -5$ dan $x = +5$

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

penyelesaian

~~NUMERIK~~

Contoh: Metode **4-PERSEGI PANJANG**
dan Metode **TRAPESIUM**

..... LANJUTAN:

2.a. Untuk Metode **4-PERSEGI PANJANG:**

$$L_i = \Delta x * |f(x_i)|, i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

atau

$$L_i = \Delta x * |f(x_i + \Delta x)|, i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

2.b. Untuk Metode **TRAPESIUM:**

$$L_i = \Delta x * [|f(x_i)| + |f(x_i + \Delta x)|] / 2, i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

3. Luas Bidang = $\sum L_i, i = 0, \dots, N-1$

LANJUTKAN

Kasus 2

~~Mencari LUAS~~
~~Bidang~~

Carilah luas bidang antara (x) dan sumbu x pada interval antara $x = -5$ dan $x = +5$

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

penyelesaian

~~NUMERIK~~

Contoh: Metode **4-PERSEGI PANJANG**
dan Metode **TRAPESIUM**
..... LANJUTAN:

4. Menghitung *Error* (GALAT):

$$\text{Error} = \left| \frac{\text{Luas Numerik} - \text{Luas Analitik}}{[\text{Luas Analitik}]} \right| \times 100\%$$

Catatan: Bagaimana mendapatkan (estimasi) *Error* jika [Luas Analitik] tidak diketahui???

penyelesaian

NUMERIK

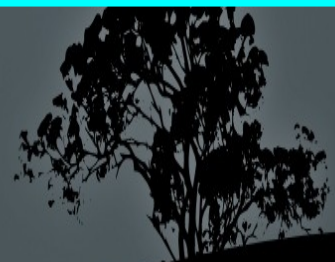
UPAYA BAKU MEMPERKECIL ERROR

Dalam berbagai metode NUMERIK ada setidaknya 2 (**dua**) langkah baku untuk memperkecil galat (*ERROR*), yaitu:

1. Memperbanyak interval N atau memperkecil Δx

2. Memperbaiki metode

Kebanyakan program numerik menggunakan sedikitnya 2 (dua) macam metode yang berbeda, menggunakan selisih hasil keduanya sebagai estimasi *ERROR*, dan terus memperbanyak N /memperkecil Δx sampai selisih hasil keduanya lebih kecil dari suatu angka yang masih ditolerir.

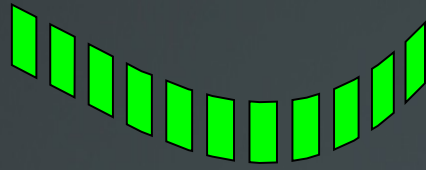


Tugas 2

~~Mencari LUAS~~ ~~Bidang~~

- 1) Carilah masing-masing **Luas Analitik** dari bidang antara $f(x)$ dan **sumbu x** pada interval $a \leq x \leq b$, dengan $f(x)$ semua yang digunakan pada **Tugas 1** serta nilai a dan b -nya masing-masing adalah **nilai-nilai awal** yang digunakan ketika mencari akar secara numerik dengan metode *Bisection*.
- 2) Susunlah **PROGRAM KOMPUTER** (bahasa pemrograman apa saja) untuk mencari **Luas Numerik** (metode *4-PERSEGI PANJANG* dan metode *TRAPESIUM*) dari bidang pada soal 1) di atas, dengan N yang cukup banyak sehingga *Error*-nya $< 0,01\%$ dibandingkan **Luas Analitik**.
- 3) Masukkan ke dalam program yang anda susun, suatu algoritma menghitung (estimasi) *Error* **tanpa** menggunakan **Luas Analitik**. Gunakan algoritma itu untuk menghentikan program dari menambah jumlah N .
- 4) Bahaslah **kelebihan** dan **kekurangan** metode numerik mencari luas bidang dibandingkan metode analitik.

Next



ANALITIK VS NUMERIK

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~
~~Persamaan~~
~~Differensial~~