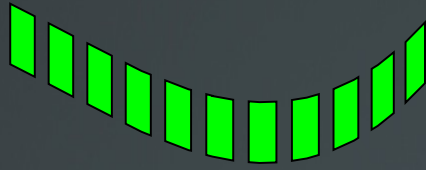


Next



ANALITIK VS NUMERIK

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~
~~Persamaan~~
~~Differensial~~

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~ ~~Persamaan Differensial~~

Carilah solusi $x(t)$ dari persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation, ODE*) order pertama:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\{t, x(t)\}, x(0) = x_0$$

jika diketahui:

$$f\{t, x(t)\} = -2x(t), \\ x(0) = 10$$

Istilah-istilah:

“order”

“keadaan awal” (*initial condition*)

peubah bebas t

peubah terikat x

$x(t)$ -----> x

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~
~~Persamaan Differensial~~

penyelesaian

ANALITIK

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2 x(t)$$

$$\int \frac{dx(t)}{x(t)} = - \int 2 dt$$



Kasus 3

Penyelesaian

~~Mencari SOLUSI~~
~~Persamaan Differensial~~

~~NUMERIK~~

Deret EULER:

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) = & x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + (1/2)\Delta t^2(d^2x(t)/dt^2) \\& + (1/6)\Delta t^3(d^3x(t)/dt^3) + \dots \\& + (1/n!)\Delta t^n(d^nx(t)/dt^n)\end{aligned}$$

Metode Numerik Order Pertama:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + \text{Error}$$

mulai pada $t = 0$, dihitung:

$$\begin{aligned}x(0 + \Delta t) = & x(0) + \Delta t f\{t, x(0)\} \\& \text{dan seterusnya.....}\end{aligned}$$

Kasus 3

penyelesaian

Menyelesaikan

Persamaan Differensial

NUMERIK

Contoh Kasus:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t), x(0) = 10$$

Penyelesaian secara numerik, Order Pertama, $\Delta t = 0.1$:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x(\Delta t) &= x(0) + \Delta t(dx(0)/dt) \\ &= x(0) + \Delta t(-2x(0)) \\ &= 10 + 0.1(-2)(10) \\ x(0.1) &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 0.1, \quad x(0.2) &= x(0.1) + \Delta t(dx(0.1)/dt) \\ &= 8 + 0.1(-2)(8) \\ &= 6.4 \quad \text{dst.} \end{aligned}$$

penyelesaian **NUMERIK**

UPAYABAKU MEMPERKECIL ERROR

Dalam berbagai metode NUMERIK ada setidaknya **2 (dua)** langkah baku untuk memperkecil galat (*ERROR*), yaitu:

1. Memperbanyak interval N atau memperkecil Δt

2. Memperbaiki metode

Kebanyakan program numerik menggunakan sedikitnya 2 (dua) macam metode yang berbeda, menggunakan selisih hasil keduanya sebagai estimasi *ERROR*, dan terus memperbanyak N/memperkecil Δt sampai selisih hasil keduanya lebih kecil dari suatu angka yang masih ditolerir.

Next

ANALITIK

VS

~~NUMERIK~~

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~

~~Persamaan~~

~~Differensial~~

~~Ordinary Differential Equation~~

Second Order Numerical Method



Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~ ~~Persamaan Differensial~~

Carilah solusi $x(t)$ dari persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation, ODE*) order pertama:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t), \quad x(0) = x_0$$

Deret EULER:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \Delta t^2 \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{6} \right) \Delta t^3 \left(\frac{d^3x(t)}{dt^3} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{n!} \right) \Delta t^n \left(\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right)$$

Second Order Numerical Method

Kasus 3

Second Order Numerical Method

~~Merinci Solusi Persamaan Diferensial~~

Metode Numerik Order Pertama:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + \text{Error}$$

Metode Numerik Order Kedua:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(dx(t)/dt) + \left(\frac{1}{2}\right)(\Delta t)^2(d^2x(t)/dt^2) + \text{Error}$$

$$x'(t) = dx(t)/dt \quad \text{dan} \quad x''(t) = d^2x(t)/dt^2$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t[x'(t)] + \left(\frac{1}{2}\right)(\Delta t)^2[x''(t)]$$

$x(t)$ diketahui,

$x'(t)$ dihitung dari $f\{t, x(t)\}$,

bagaimana menghitung $x''(t)$???

ESTIMASI $x''(t)$

Kasus 3

Second Order Numerical Method

~~Men cari Solusi Persamaan Diferensial~~

Metode Numerik Order Kedua (lanjutan):

ESTIMASI $x''(t)$

“FORWARD DIFFERENCE”

$x(t)$ diketahui,

$x'(t)$ dihitung dari $f\{t, x(t)\}$,

dengan metode order pertama,

dihitung estimasi $x(t+\Delta t)$:

$$Ex(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t[x'(t)]$$

lalu dihitung estimasi $x'(t+\Delta t)$:

$$Ex'(t + \Delta t) = f\{t+\Delta t, Ex(t+\Delta t)\}$$

dengan demikian ESTIMASI $x''(t)$

dapat dihitung:

$$Ex''(t) = [Ex'(t+\Delta t) - x'(t)]/\Delta t$$

Kasus 3

Second Order Numerical Method

Metode Numerik Order Kedua (lanjutan):

Setelah ESTIMASI $x''(t)$ diketahui,
maka selanjutnya dapat dihitung
 $x(t + \Delta t)$:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t[x'(t)] + (\frac{1}{2})(\Delta t)^2[Ex''(t)]$$

ESTIMASI $x''(t)$:

$$Ex''(t) = [Ex'(t+\Delta t) - x'(t)]/\Delta t$$

sehingga:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t[x'(t)] + (\frac{1}{2})(\Delta t)^2[Ex'(t+\Delta t) - x'(t)]/\Delta t$$

jadi:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (\frac{1}{2}\Delta t)[x'(t) + Ex'(t+\Delta t)]$$

dengan $Ex'(t+\Delta t) = f\{t+\Delta t, Ex(t+\Delta t)\}$

dan $Ex(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t[x'(t)]$

Kasus 3

Second Order Numerical Method

~~Merinci Solusi~~
~~Persamaan Differensial~~

Metode Numerik Order Kedua (lanjutan): Kembali ke contoh kasus:

$$x'(t) = f\{t, x(t)\} = -2 x(t), x(0) = 10$$

Misalnya $\Delta t = 0,1$

Pada $t = 0$:

$$x'(0) = -2 x(0) = (-2) \cdot 10 = -20$$

$$Ex(0+\Delta t) = x(0) + \Delta t[x'(0)] = 10 + (0,1)(-20)$$

$$Ex(0,1) = 8$$

$$Ex'(0+\Delta t) = f\{0+\Delta t, Ex(0+\Delta t)\} = -2 Ex(\Delta t)$$

$$Ex'(0,1) = -16$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (\frac{1}{2}\Delta t)[x'(t) + Ex'(t+\Delta t)]$$

$$\begin{aligned} x(0,1) &= x(0) + (\frac{1}{2})(0,1)[x'(0) + Ex'(0,1)] \\ &= 10 + (\frac{1}{2})(0,1)[(-20) + (-16)] \\ &= 8,2 \end{aligned}$$

Kasus 3

Second Order Numerical Method

~~Men cari Solusi Persamaan Diferensial~~

Selanjutnya

Pada $t = 0,1$:

$$x'(0,1) = -2 x(0,1) = (-2) \cdot 8,2 = -16,4$$

$$\begin{aligned} Ex(0,1+\Delta t) &= x(0,1) + \Delta t [x'(0,1)] \\ &= 8,2 + (0,1)(-16,4) \end{aligned}$$

$$Ex(0,2) = 6,56$$

$$\begin{aligned} Ex'(0,1+\Delta t) &= f\{0,1+\Delta t, Ex(0,1+\Delta t)\} \\ &= -2 Ex(0,2) = -2 (6,56) \end{aligned}$$

$$Ex'(0,2) = -13,12$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (\frac{1}{2}\Delta t)[x'(t) + Ex'(t+\Delta t)]$$

$$\begin{aligned} x(0,2) &= x(0,1) + (\frac{1}{2})(0,1)[x'(0,1) + Ex'(0,2)] \\ &= 8,2 + (\frac{1}{2})(0,1)[(-16,4) + (-13,12)] \\ &= 6,274 \end{aligned}$$

dan seterusnya



Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~ ~~Persamaan Differensial~~

ERROR dan TOLERANSI

Pada umumnya Metode Numerik digunakan ketika Solusi Analitik **TIDAK DIKETAHUI**, dengan demikian **ERROR** yang sesungguhnya juga tidak diketahui. Oleh sebab itu biasa diterapkan **ALGORITMA** sebagai berikut:

1. Tetapkan suatu batas toleransi, ϵ , sebuah angka yang cukup kecil, misalnya $\epsilon = 10^{-6}$.
2. Tetapkan *step-size* awal:

$$\Delta t = t_a / N$$

t_a = t akhir perhitungan

N = jumlah interval

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~ ~~Persamaan Differensial~~

ERROR dan TOLERANSI (lanjutan.....)

3. Hitung solusi untuk $t = \Delta t$ dengan suatu metode numerik, misalnya **Metode A**, sehingga diperoleh $x_A(\Delta t)$
4. Hitung lagi solusi untuk dengan metode numerik lain yang **lebih baik** dari **Metode A**, misalnya **Metode B**, sehingga diperoleh $x_B(\Delta t)$.
5. Hitung selisih $E_{est} = |x_B(\Delta t) - x_A(\Delta t)|$ sebagai **estimasi ERROR**.
6. Jika $E_{est} > \varepsilon$, maka *step-size* diperkecil, yang baru = $\Delta t / n$, n = bilangan bulat > 1 , misalnya 2, 10, dst., lalu kembali ke **langkah 3**

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~ ~~Persamaan Differensial~~

ERROR dan TOLERANSI (lanjutan.....)

Catatan: Agar tidak terjadi *infinite loop* dari langkah 3 sampai langkah 6, maka *step-size* harus dibatasi jangan lebih kecil dari ϵ . Jika terjadi demikian berarti toleransi-nya terlalu kecil. Program gagal, kembali ke langkah 1.

6. Jika $E_{\text{est}} \leq \epsilon$, berarti $x_B(\Delta t)$ adalah solusi untuk $t = \Delta t$ maka lanjut hitung solusi untuk $t = 2\Delta t$ dengan kembali menggunakan langkah 3 tanpa mengubah Δt .

7. Begitu seterusnya diulangi sampai $t = t_a$.

Next

ANALITIK

VS

~~NUMERIK~~

Kasus 3

~~Mencari SOLUSI~~

~~Persamaan~~

~~Differensial~~

~~Ordinary Differential Equation~~

Higher-Order Differential Equation

dan

Tugas 3