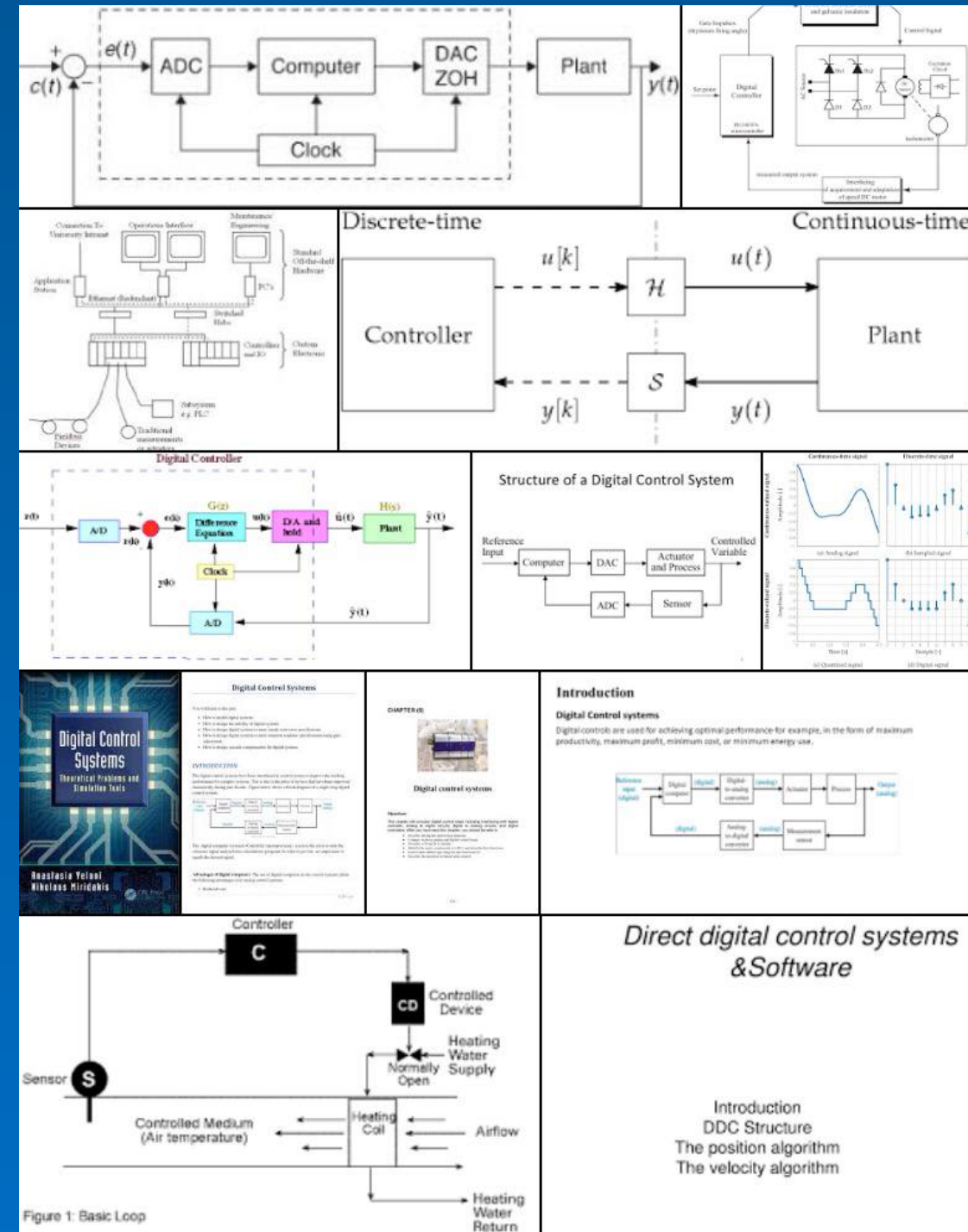


372D4123

SISTEM KENDALI DIGITAL (SKD)

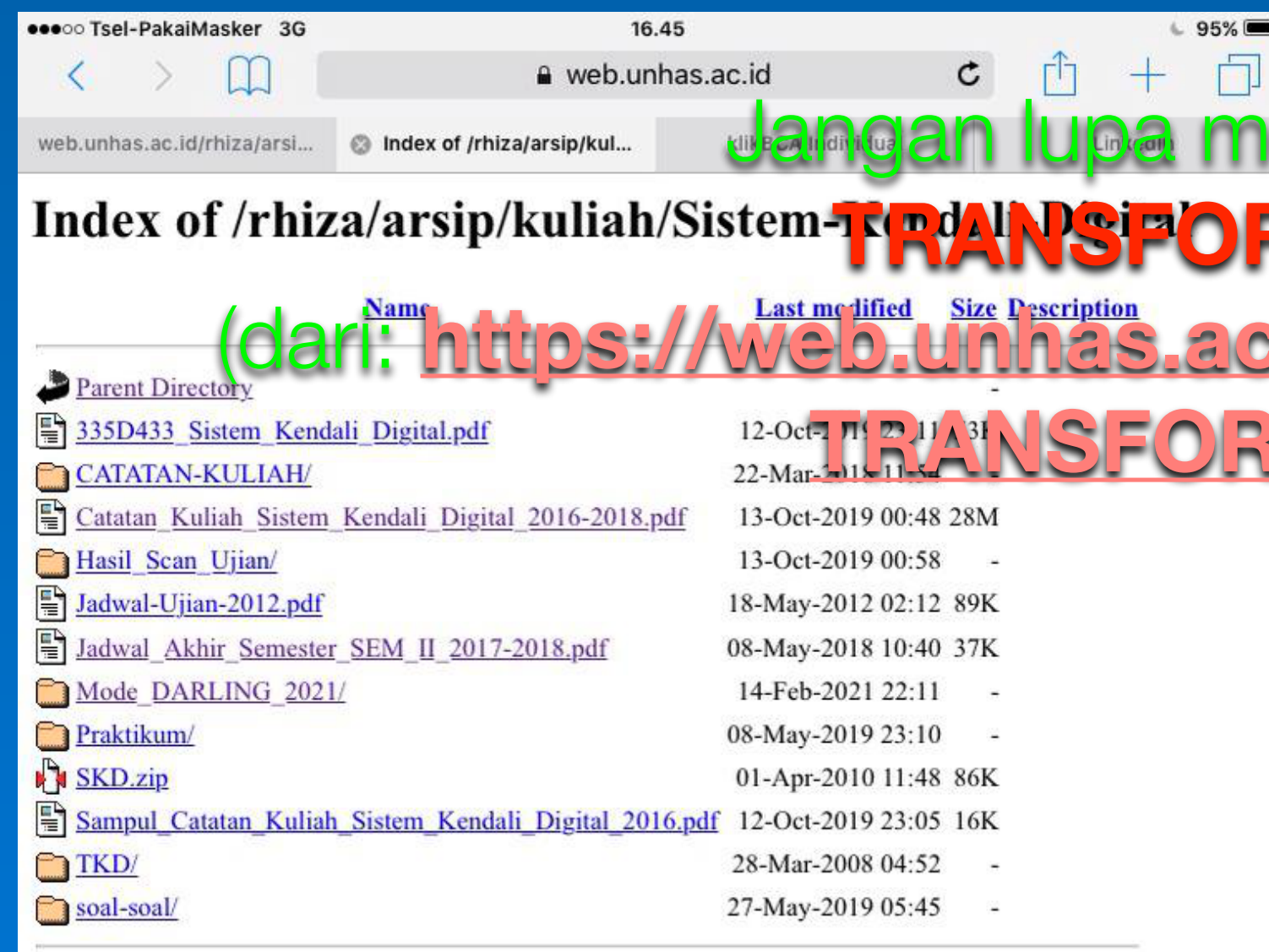
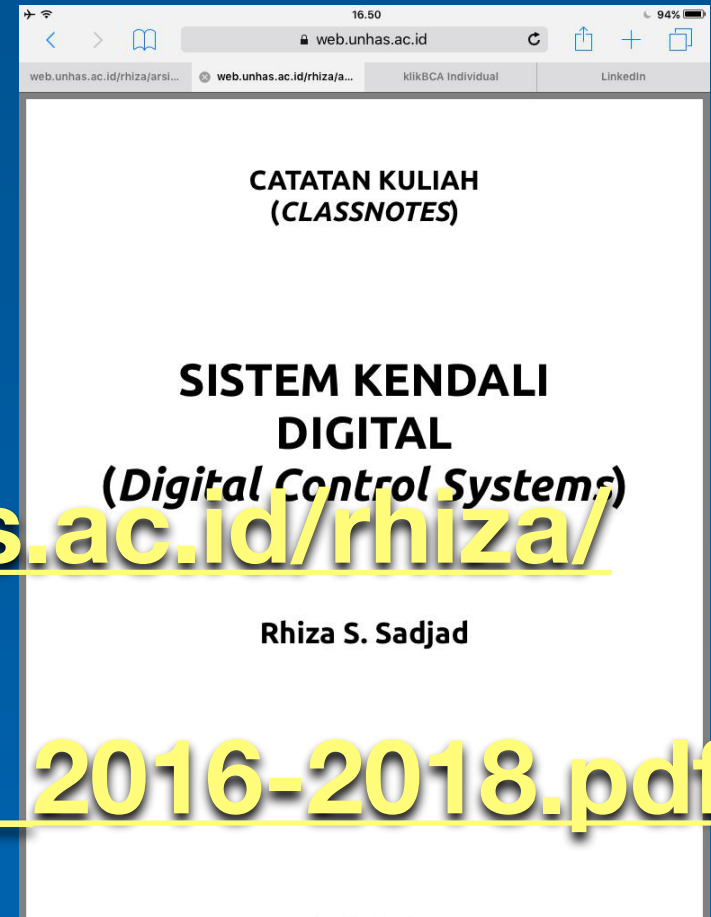
MODUL 3 Transformasi Z



(versi kuliah DARLING = semi-DARing semi-LurING)
Semester Akhir 2020-2021

SUMBER PEMBELAJARAN

Materi Pembelajaran: https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Sistem-Kendali-Digital/Catatan_Kuliah_Sistem_Kendali_Digital_2016-2018.pdf



Jangan lupa mengunduh

TRANSFORM.pdf

(dari: <https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/>

TRANSFORM.pdf)

6.151

web.unhas.ac.id

94%

B.2 TABLE OF z-TRANSFORMS

$\mathcal{F}(s)$ is the Laplace transform of $f(t)$ and $F(z)$ is the z-transform of $f(nT)$. Unless otherwise noted, $f(t) = 0, t < 0$ and the region of convergence of $F(z)$ is outside a circle $r < |z|$ such that all poles of $F(z)$ are inside r .

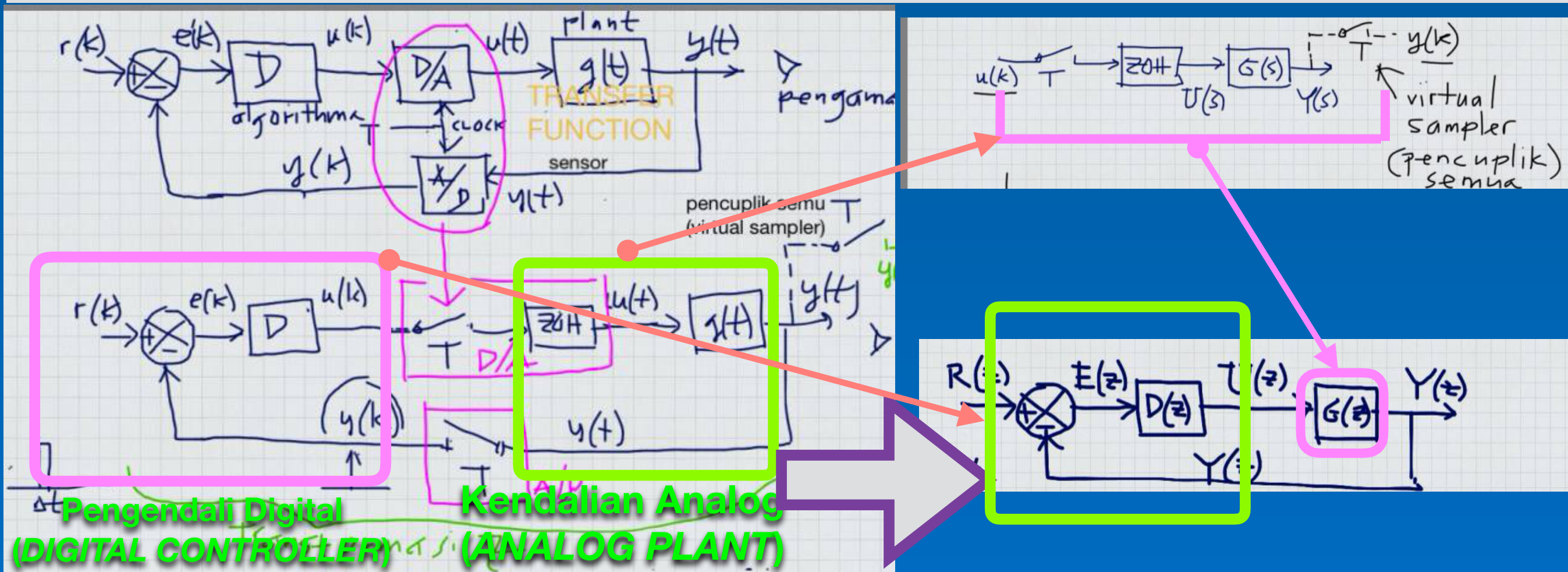
Table B.2

Number	$\mathcal{F}(s)$	$f(nT)$	$F(z)$
1	—	$1, n = 0; 0, n \neq 0$	1
2	—	$1, n = k; 0, n \neq k$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \sin anT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} \frac{z^2+1}{z^2-1}$
6	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \cos anT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} \frac{z^2-1}{z^2+1}$
7	$\frac{1}{s-a}$	$a^{-n} (n-1)! \partial a^{n-1}$	$\frac{z}{z-aT}$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-anT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	nTe^{-anT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2} (nT)^2 e^{-anT}$	$\frac{T^2 z e^{-aT}}{2(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \partial a^{m-1} (e^{-anT})$	$\frac{(-1)^{m-1} T^m z^m}{(m-1)! \partial a^{m-1} (z-e^{-aT})^m}$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-anT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$

Number	$\mathcal{F}(s)$	$f(nT)$	$F(z)$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a} (anT - 1 + e^{-anT})$	$\frac{z[(aT-1)e^{-aT} + (1-e^{-aT}) - aTe^{-aT}]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$(e^{-anT} - e^{-bnT})$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-anT)e^{-anT}$	$\frac{z(z-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - e^{-anT} (1+anT)$	$\frac{z[1 - e^{-aT} - aTe^{-aT} + e^{-2aT} - e^{-aT} + aTe^{-aT}]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bnT} - ae^{-anT}$	$\frac{z[be^{-bT} - ae^{-aT}]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
18	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\sin anT$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
19	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos anT$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-anT} \cos bnT$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos bT)}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-anT} \sin bnT$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
22	$\frac{a^2+b^2}{s((s+a)^2+b^2)}$	$1 - e^{-anT} (\cos bnT + \frac{a}{b} \sin bnT)$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT})}$ $A = 1 - e^{-aT} \cos bT - \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bT$ $B = e^{-2aT} + \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bT - e^{-aT} \cos bT$

PEMODELAN SKD MODEL NISBAH ALIH

Berdasarkan **ISYARAT2** dibangun **MODEL NISBAH ALIH** (*Transfer Function*) untuk **SISTEM KENDALI DIGITAL (SKD)**



Isyarat keluaran *time-continuous* $y(t)$, dicuplik menjadi data digital $y(k)$ oleh **PENCUPLIK SEMU** (*virtual sampler*) sehingga pada mata pengamat semua isyarat dalam sistem terlihat sebagai **DATA DIGITAL** $r(k)$, $u(k)$ dan $y(k)$. Setelah semua isyarat merupakan isyarat data tercuplik (*sampled-data*) maka dapat dilakukan **TRANSFORMASI z** dengan sah.

Cuplikan Isyarat dan TRANSFORMASI Z

TRANSFORMASI Z hanya berlaku untuk **ISYARAT2 TERCUPLIK**

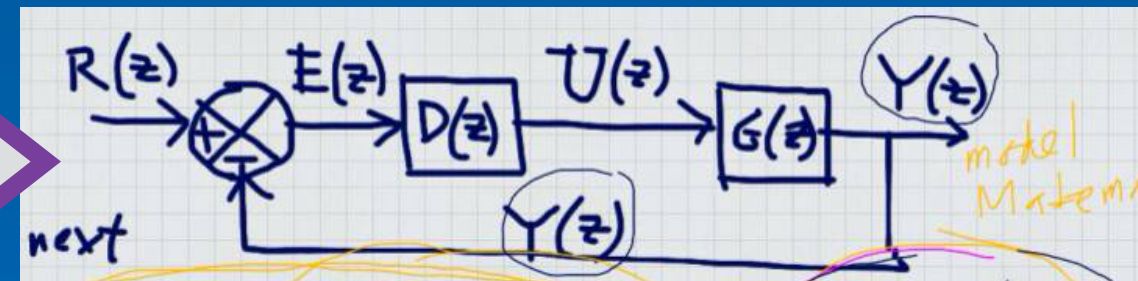
Definisi: $f(t) \langle \text{dicuplik} \rangle f(kT), k=0,1,2,3, \dots$
 $f(z) = Z f(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k)$

z = kebalikan dari
 $z^{-1} = \frac{1}{z}$ = "delay" (hunda)
 $z^{-1} = \Delta$ / waktu tunda

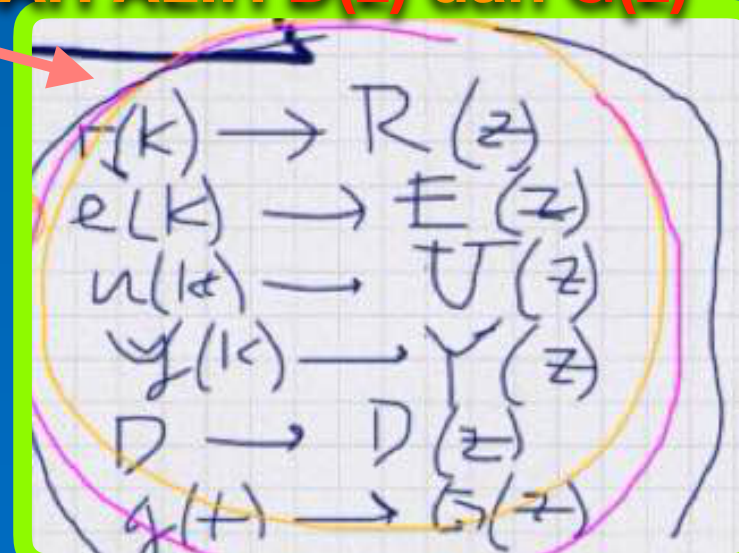
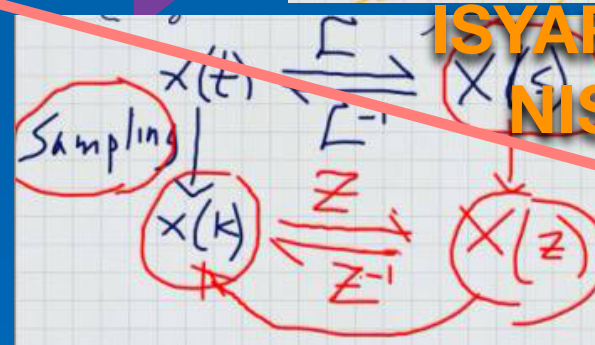
DEFINISI

TRANSFORMASI Z

untuk ISYARAT TERCUPLIK



ISYARAT $R(z)$, $E(z)$, $U(z)$ dan $Y(z)$
NISBAH ALIH $D(z)$ dan $G(z)$



Isyarat keluaran *time-continuous* $y(t)$, dicuplik menjadi data digital $y(k)$ oleh **PENCUPLIK SEMU** (*virtual sampler*) sehingga pada mata pengamat semua isyarat dalam sistem terlihat sebagai **DATA DIGITAL** $r(k)$, $u(k)$ dan $y(k)$. Setelah semua isyarat merupakan isyarat data tercuplik (*sampled-data*) maka dapat dilakukan **TRANSFORMASI Z** dengan sah.

CONTOH Cuplikan Isyarat dan TRANSFORMASI Z

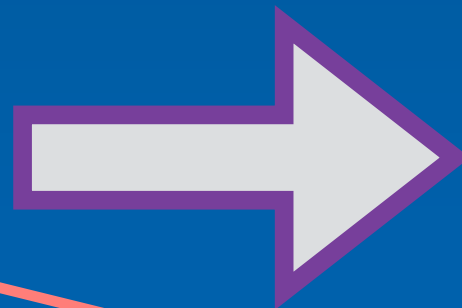
TRANSFORMASI Z hanya berlaku untuk ISYARAT2 TERCUPLIK

$z =$ kebalikan dari "delay" (mundur)
 $z^{-1} = \frac{1}{z} = \Delta$ waktu mundur

DEFINISI

TRANSFORMASI Z
 untuk ISYARAT TERCUPLIK

Contoh: (dari tabel, $n \rightarrow k, k \rightarrow n$)
 * Isyarat: $f(k) \begin{cases} = 1, k=0 \\ = 0, k \neq 0 \end{cases}$ (baris 1)
 $\mathcal{Z}f(k) = 1$
 * Isyarat: $f(k) \begin{cases} = 1, k=n \\ = 0, k \neq n \end{cases}$ (baris 2)
 $\mathcal{Z}f(k) = z^{-n}$



Contoh soal:
 * Diketahui isyarat diskrit, tercuplik $f(k)$:

k	f(k)
0	3
1	2
2	1
>2	0



Tentukan $F(z) = \mathcal{Z}f(k)$
 Jawab: Definisi: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k)$
 $= z^{-0}f(0) + z^{-1}f(1) + z^{-2}f(2) + \dots$
 $= 3 + 2z^{-1} + z^{-2} = \frac{3z^2 + 2z + 1}{z^2}$

* Diketahui isyarat undak satuan $u(t)$
 dicuplik dengan periode cuplik T menjadi
 isyarat diskrit (frek. cuplik = $\frac{1}{T}$)
 sampling rate $\Delta u(t) = \frac{1}{T}$

$$u(k) = 1, k \geq 0$$



Tentukan $U(z) = \mathcal{Z}u(k)$

Jawab: $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} u(k) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$
 $U(z) - z^{-1}U(z) = 1$
 $(1 - z^{-1})U(z) = 1$
 $U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$
 $= \frac{z}{z - 1} \rightarrow$ baris 3

B.2 TABLE OF z-TRANSFORMS

$\mathcal{F}(s)$ is the Laplace transform of $f(t)$ and $F(z)$ is the z-transform of $f(nT)$. Unless otherwise noted, $f(t) = 0, t < 0$ and the region of convergence of $F(z)$ is outside a circle $r < |z|$ such that all poles of $F(z)$ are inside r .

Number	$\mathcal{F}(s)$	$f(nT)$	$F(z)$
1	—	$1, n = 0; 0, n \neq 0$	1
2	—	$1, n = k; 0, n \neq k$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	nT	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(nT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(nT)^3$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} e^{-anT}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-anT}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$nT e^{-anT}$	$\frac{z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(nT)^2 e^{-anT}$	$\frac{T^2 z(z+e^{-aT})}{2(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} (e^{-anT})$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-aT}}$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-anT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$

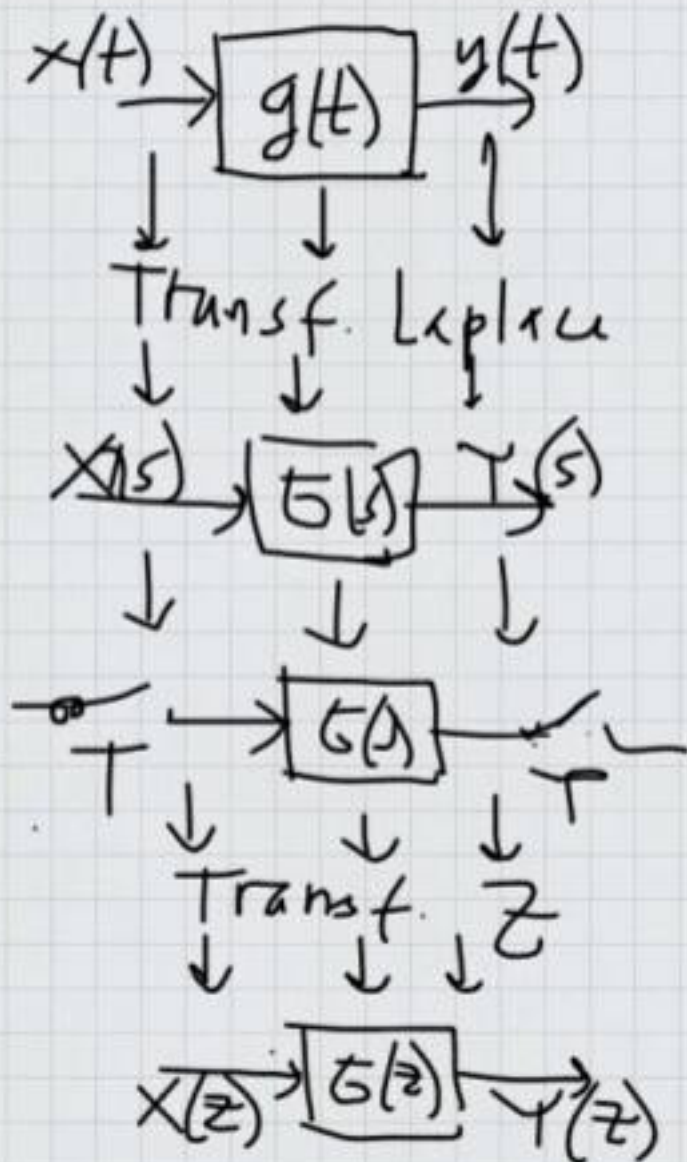
Number	$\mathcal{F}(s)$	$f(nT)$	$F(z)$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(anT - 1 + e^{-anT})$	$\frac{z[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z - e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$(e^{-anT} - e^{-bnT})$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - anT)e^{-anT}$	$\frac{z(z - e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^2}$
16	$\frac{s^2}{(s+a)^2}$	$1 - e^{-anT}(1 + anT)$	$\frac{z[1 - e^{-aT} - aTe^{-aT}]}{(z - e^{-aT})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bnT} - ae^{-anT}$	$\frac{z[(b-a) - (be^{-bT} - ae^{-aT})]}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
18	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin anT$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
19	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos anT$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-anT} \cos bnT$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos bT)}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
21	$\frac{a^2 + b^2}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-anT} \sin bnT$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
22	$\frac{s((s+a)^2 + b^2)}$	$1 - e^{-anT}(\cos bnT + \frac{a}{b} \sin bnT)$	$\frac{z(Az + B)}{(z-1)(z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT})}$ $A = 1 - e^{-aT} \cos bT - \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bT$ $B = e^{-2aT} + \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bT - e^{-aT} \cos bT$

Tabel Transf. Z =
 $\begin{bmatrix} n \rightarrow k \\ k \rightarrow n \end{bmatrix}$

Nisbah Alih dan TRANSFORMASI Z

TRANSFORMASI Z hanya berlaku untuk **NISBAH ALIH yang DIAPIT oleh PENCUPLIK di ARAH MASUKAN dan di ARAH KELUARAN**. Nisbah Alih **$G(z)$** adalah **tanggapan denyut diskrit** (*discrete impulse response*)

* Nisbah Alih / Transfer Function



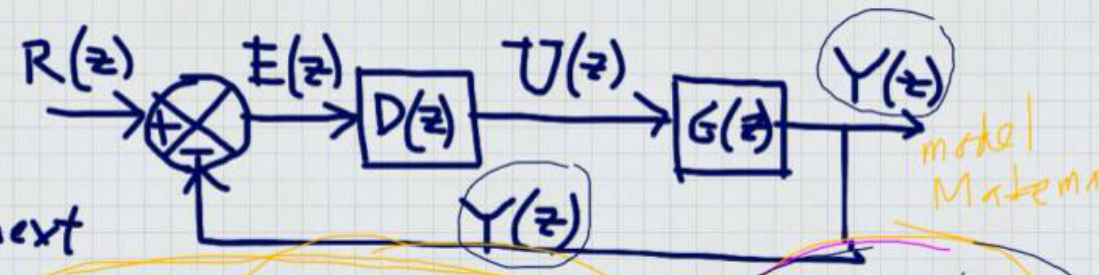
$g(t)$ = tanggapan de^{next}
artinya jika $x(t) = \delta(t)$
maka $y(t) = g(t)$

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

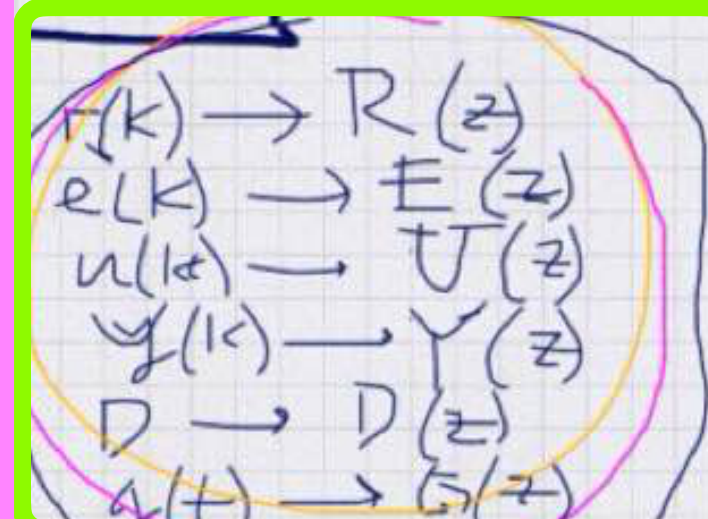
Pencuplikan, T

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z)$$

jika $x(k)$ diskrit
maka $Y(z) = ?$



ISYARAT $R(z)$, $E(z)$, $U(z)$ dan $Y(z)$
NISBAH ALIH $D(z)$ dan $G(z)$

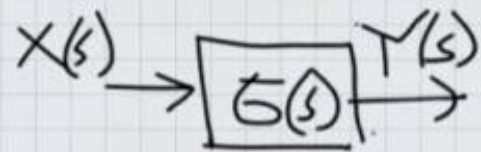


$G(z)$ dapat didefinisikan sebagai tanggapan denyut diskrit, (*discrete impulse response*)

KASUS Nisbah Alih dan TRANSFORMASI Z

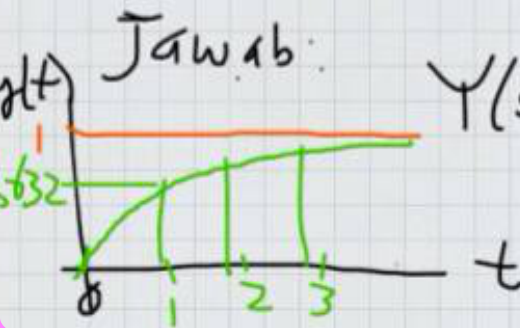
TRANSFORMASI Z hanya berlaku untuk **NISBAH ALIH** yang **DIAPIT** oleh **PENCUPLIK** di **ARAH MASUKAN** dan di **ARAH KELUARAN**. Nisbah Alih **G(z)** adalah **tanggapan denyut diskrit** (*discrete impulse response*)

Contoh kasus:



Diketahui $X(s) = \frac{1}{s}$
 $G(s) = \frac{1}{s+1}$
Tentukan $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

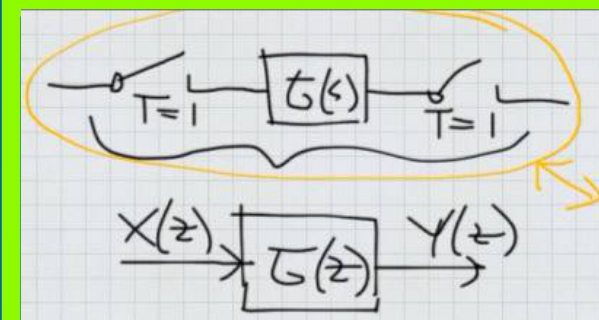
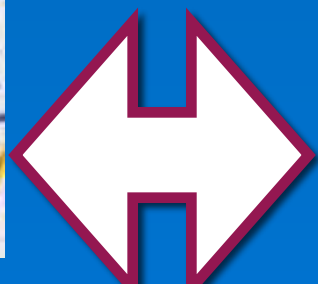
Jawab: $Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$
 $\rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1 - e^{-t}$



$y(t) = 1 - e^{-t}$

k	t	y(t)
0	0	0
1	1	0,6321
2	2	0,8647
3	3	0,9502
4	4	0,9817

Beda !



$X(z) = \frac{z}{z-1}$

$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z - 0,3679}$

$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,3679)}$
 $= \frac{z}{z^2 - 1,3679z + 0,3679} \rightarrow \text{pembagian}$

$Y(z) = \frac{y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + y(3)z^{-3}}{1 + 1,3679z^{-1} + 1,5032z^{-2} + 1,5530z^{-3}}$
 $\frac{z^2 - 1,3679z + 0,3679}{z^2 - 1,3679z + 0,3679} -$
 $\frac{1,3679z - 0,3679}{1,3679z - 1,8711 + 0,5072z^{-1}}$
 $\frac{1,5032 - 0,5032z^{-1}}{1,5032 - 2,0562z^{-1} + 0,5530z^{-2}}$
 $\frac{1,5530z^{-1} - 0,5530z^{-2}}{1,5530z^{-1} - 0,5530z^{-2}}$
 $y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

k	y(k)
0	1
1	1,3679
2	1,5032
3	1,5530

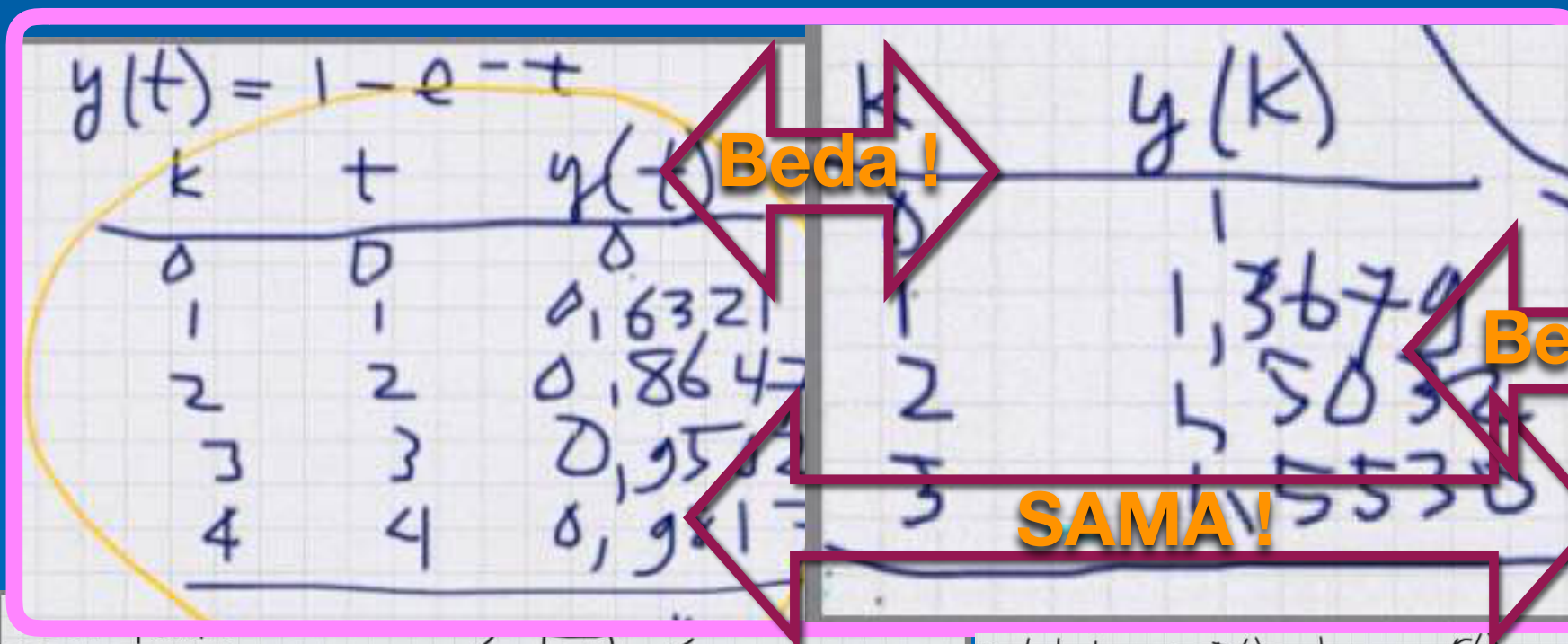
BERBEDA dgn y(k) sebelum nya

NEXT...

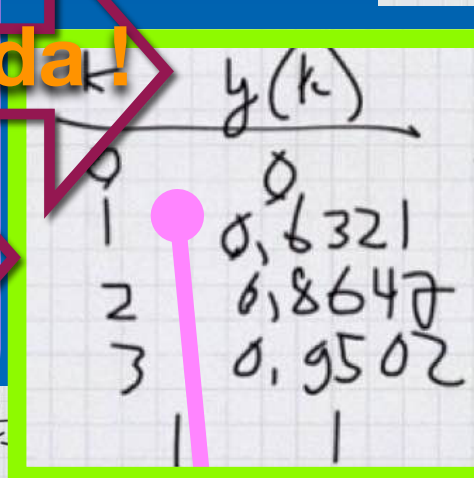
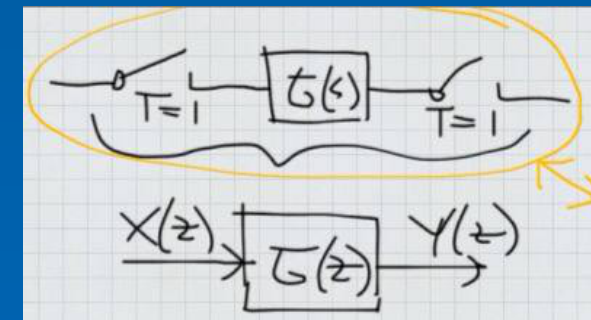
on ZOH !

Nisbah Alih dengan ZOH dan TRANSFORMASI Z

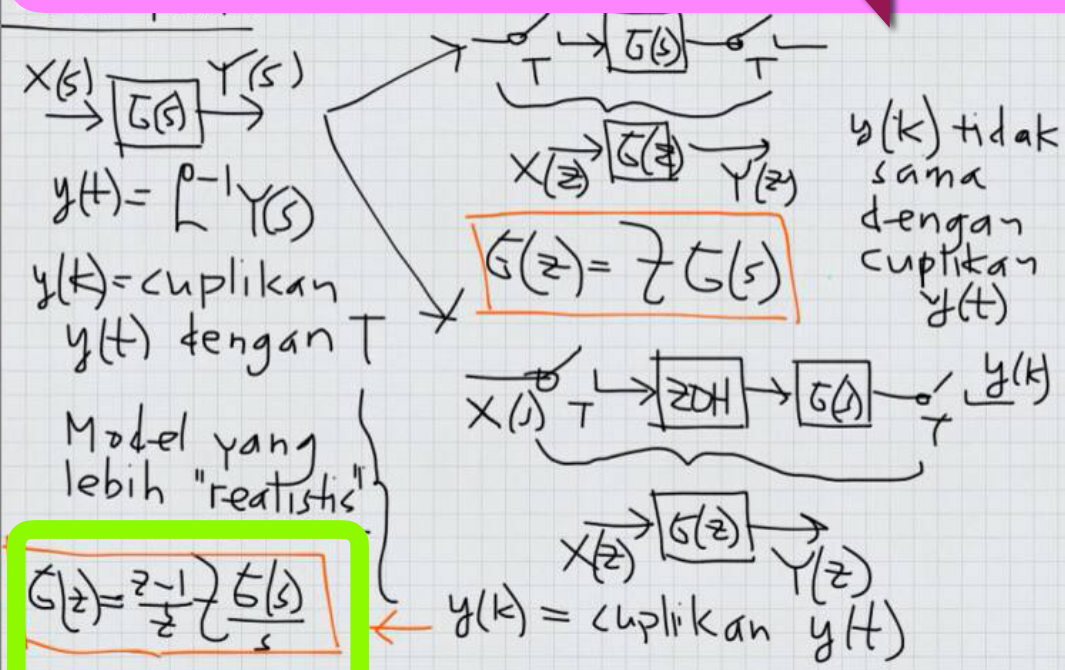
TRANSFORMASI Z untuk **NISBAH ALIH** yang **DIAPIT** oleh **PENCUPLIK** + **ZOH** di **ARAH MASUKAN** dan **PENCUPLIK** saja di **ARAH KELUARAN** memodelkan secara **MATEMATIS** suatu **D/A-C** dengan akurat.



tanpa ZOH!



dengan ZOH!



Untuk kasus $G(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0,6321z}{(z-1)(z-0,3679)}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{0,6321}{z-0,3679}$$

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{0,6321z}{(z-1)(z-0,3679)} = \frac{0,6321z}{z^2 - 1,3679z + 0,3679}$$

$y(k)$ dapat diperoleh dengan pembagian

dengan ZOH!

$$Y(z) = \frac{0,6321z^{-1} + 0,8647z^{-2} + 0,9502z^{-3}}{z^2 - 1,3679z + 0,3679}$$

$$0,6321z - 0,8647z + 0,2325z^{-1}$$

$$0,8647 - 1,1828z^{-1} + 0,3181z^{-2}$$

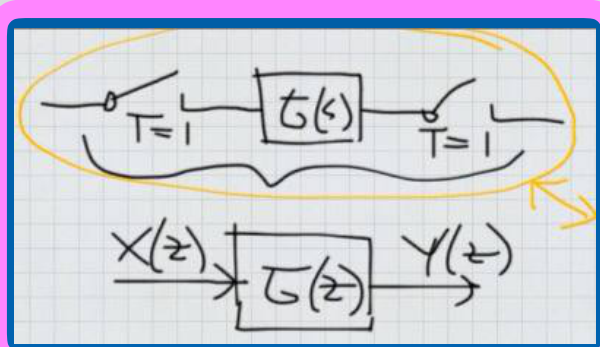
$$0,9502z^{-1} - 0,3181z^{-2}$$

k	y(k)
0	0
1	0,6321
2	0,8647
3	0,9502

Sesuai dengan $y(t)$ untuk $t=0,1,2,3,-$

Model Nisbah Alih dengan ZOH dan TRANSFORMASI Z

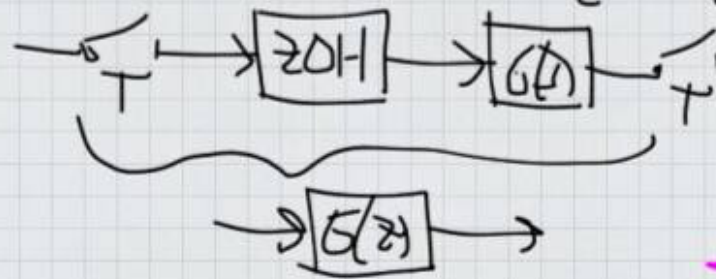
TRANSFORMASI Z untuk **NISBAH ALIH** yang **DIAPIT** oleh **PENCUPLIK**
+ **ZOH** di **ARAH MASUKAN** dan **PENCUPLIK** saja di **ARAH KELUARAN**
memodelkan secara **MATEMATIS** suatu **D/A-C** dengan akurat.



tanpa ZOH
tidak mewakili
D/A-Converter

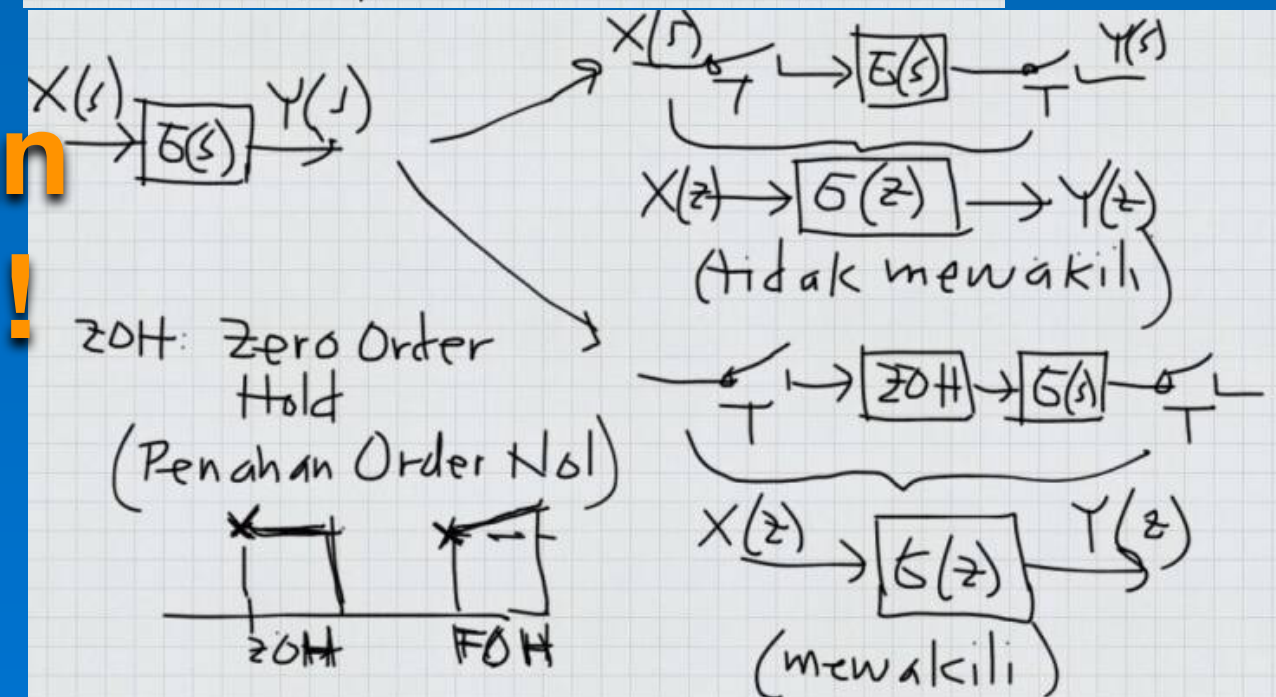
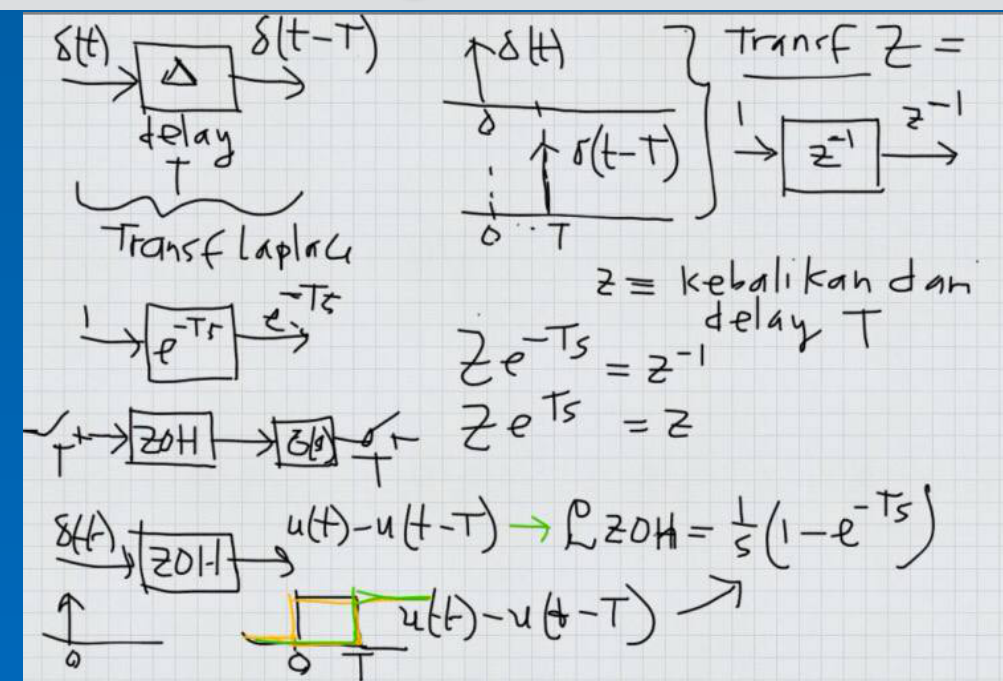
Transf Z dari gabungan ZOH dan $G(s)$:

$$\begin{aligned} Z(\text{ZOH}) G(s) &= Z \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts}) G(s) \\ &= Z (1 - e^{-Ts}) \frac{G(s)}{s} \\ &= (1 - z^{-1}) Z \frac{G(s)}{s} \\ &= \frac{z-1}{z} Z \frac{G(s)}{s} \end{aligned}$$



$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \frac{G(s)}{s}$$

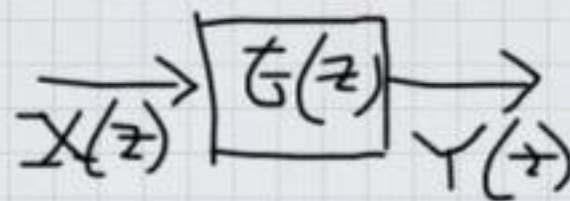
(ZOH)



Persamaan DIFFERENCE dan TRANSFORMASI Z

TRANSFORMASI Z untuk **NISBAH ALIH** yang **DIAPIT** oleh **PENCUPLIK** (+ **ZOH**) di **ARAH MASUKAN** dan **PENCUPLIK** saja di **ARAH KELUARAN** dapat dinyatakan secara **MATEMATIS** dengan **Persamaan DIFFERENCE**.

* Contoh:



Ditanyakan $y(k)$, $k=0, \dots, 5$

* Dengan Pembagian

* Dengan Pers. Diff.

Diketahui:

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

$X(z) = \sum x(k)$, dengan

k	x(k)
0	1
1	0
2	1
> 2	0

* Dengan Pembagian:

$$X(z) = \sum x(k) = 1 + z^{-2} = \frac{z^2 + 1}{z^2}$$
$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{z}{z^2 - 1} \cdot \frac{z^2 + 1}{z^2} = \frac{z^2 + 1}{z(z^2 - 1)} = \frac{z^2 + 1}{z^3 - z}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - z \overline{) z^{-1} + 2z^{-3} + 2z^{-5}} \\ \underline{z^3 \phantom{+ 2z^{-3}} + 1} \phantom{+ 2z^{-5}} \\ 2 \phantom{+ 2z^{-3}} \phantom{+ 2z^{-5}} \\ \underline{2 - 2z^{-2}} \phantom{+ 2z^{-5}} \\ 2z^{-2} \phantom{+ 2z^{-5}} \\ \underline{2z^{-2} - 2z^{-4}} \phantom{+ 2z^{-5}} \\ 2z^{-4} \phantom{+ 2z^{-5}} \\ \underline{2z^{-4} - 2z^{-6}} \phantom{+ 2z^{-5}} \\ 2z^{-6} \phantom{+ 2z^{-5}} \end{array} \Rightarrow$$

k	x(k)	y(k)
0	1	0
1	0	1
2	1	0
3	0	2
4	0	0
5	0	2

* Dengan Pers. Difference

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z - 1}{1 - z^{-2}}$$

$$\text{Kali silang} = (1 - z^{-2})Y(z) = z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = z^{-1}X(z) + z^{-2}Y(z)$$

$$\text{Pers. Diff} = y(k) = x(k-1) + y(k-2)$$

BISA dgn

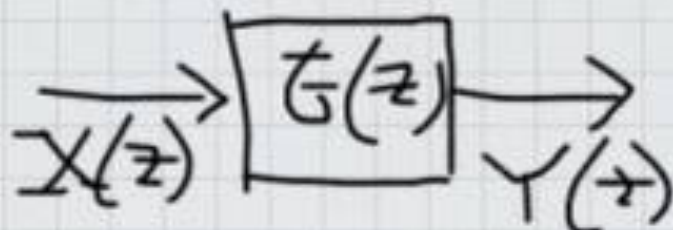
k	x(k)	y(k)
0	1	0
1	0	1
2	1	0
3	0	2
4	0	0
5	0	2

REALISASI

REALISASI Persamaan DIFFERENCE

Persamaan **DIFFERENCE** dapat direalisasikan dengan **PROGRAM** yang di-down-load ke suatu **Microcontroller**, atau sederhananya bisa juga direalisasi dengan **rangkaian penunda (delay)**, sebagai berikut:

* Contoh:



Diketahui

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

$X(z) = z^{-1} x(k)$, dengan

k	x(k)
0	1
1	0
2	1
3	0
4	0
5	0
> 2	0

* Dengan Pers. Difference

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-2}}$$

Kali silang $(1 - z^{-2})Y(z) = z^{-1}X(z)$

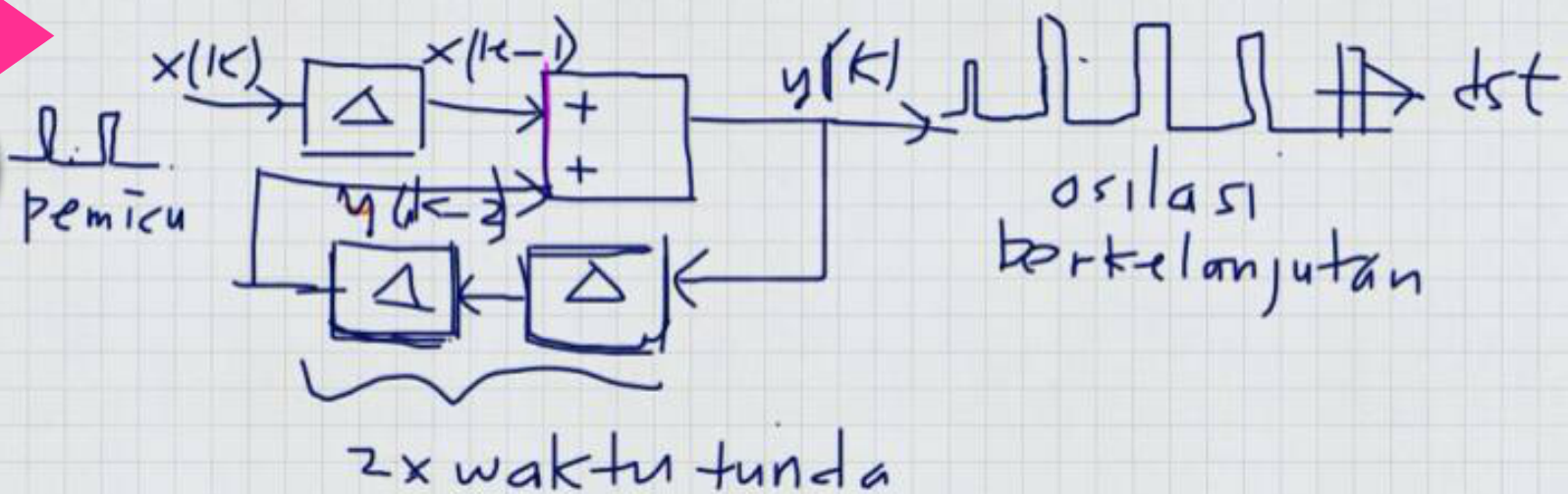
$$Y(z) = z^{-1}X(z) + z^{-2}Y(z)$$

Pers. D₁ $y(k) = x(k-1) + y(k-2)$

BISA dgn

k	x(k)	y(k)
0	1	0
1	0	1
2	1	0
3	0	2
4	0	0
5	0	2

REALISASI
 $y(k) = x(k-1) + y(k-2)$



CONTOH Lain Persamaan DIFFERENCE (1)

Contoh $G(z) = \frac{0,06321}{z - 0,3679} \rightarrow y(k) = \dots ?$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,06321 z^{-1}}{1 - 0,3679 z^{-1}}$$

pembilang dan penyebut dibagi dengan z pangkat TERTINGGI!

Dikali silang:

$$(1 - 0,3679 z^{-1}) Y(z) = 0,06321 z^{-1} U(z)$$

$$Y(z) - 0,3679 z^{-1} Y(z) = 0,06321 z^{-1} U(z)$$

Inverse Trans. z :

$$y(k) - 0,3679 y(k-1) = 0,06321 u(k-1)$$

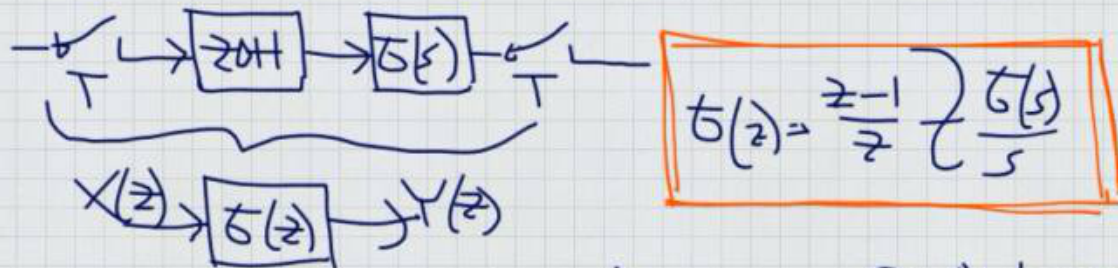
Pers. Difference

$$y(k) = 0,06321 u(k-1) + 0,3679 y(k-1)$$

k	u(k)	y(k)
0	1	0 ✓
1	1	0,06321
2	1	0,08646
3	1	0,09562
4	1	

CONTOH Lain Persamaan DIFFERENCE (2)

Contoh:



Diketahui = $X(z) = \frac{z}{z-1}$, $x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$
 $G(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 3}$

Ditanyakan = $y(k), k \geq 0$ $y(k) = z^{-1} Y(z)$

Ada 2 (dua) cara:

- * Pembagian
- * Pers. Difference

Cara I Pembagian:

$$Y(z) = G(z) X(z) = \left(\frac{z}{z^2 - 3z + 3} \right) \left(\frac{z}{z-1} \right)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \Rightarrow \frac{z^2}{z^3 - 4z^2 + 6z - 3}$$

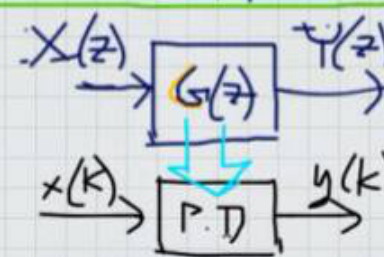
$$Y(z) \rightarrow \frac{z^2}{z^3 - 4z^2 + 6z - 3} = z^{-1} + 4z^{-2} + 10z^{-3} + 19z^{-4} + \dots$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 4z^2 + 6z - 3 \overline{) 10z^{-1} + 12z^{-2}} \\ 10z^{-1} - 40z^{-1} + 60z^{-2} - 30z^{-2} \\ \hline 10z^{-1} - 48z^{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z^2 - 3z + 3 \overline{) -z^2 + 3z - 1} \\ -z^2 + 3z - 3 \\ \hline 6z - 2 \end{array}$$

k	y(k)
0	0
1	1
2	4
3	10
4	19

* Persamaan "Difference"



Persamaan Difference = $y(k) = f(x(k), y(k-1))$
 $\Downarrow$ $\Downarrow$ Program

Cara II Pers. Diff

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 3} = \frac{z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

① dibagi pangkat tertinggi ② dikali-silang:
 $(1 - 3z^{-1} + 3z^{-2}) Y(z) = z^{-1} X(z)$

$$Y(z) - 3z^{-1} Y(z) + 3z^{-2} Y(z) = z^{-1} X(z)$$

$$Y(z) = z^{-1} X(z) + 3z^{-1} Y(z) - 3z^{-2} Y(z)$$

Inverse Transf. Z =
 Persamaan Difference (Beda, Selisih):

$$y(k) = x(k-1) + 3y(k-1) - 3y(k-2) \leftarrow \text{diambil dari "memory"}$$

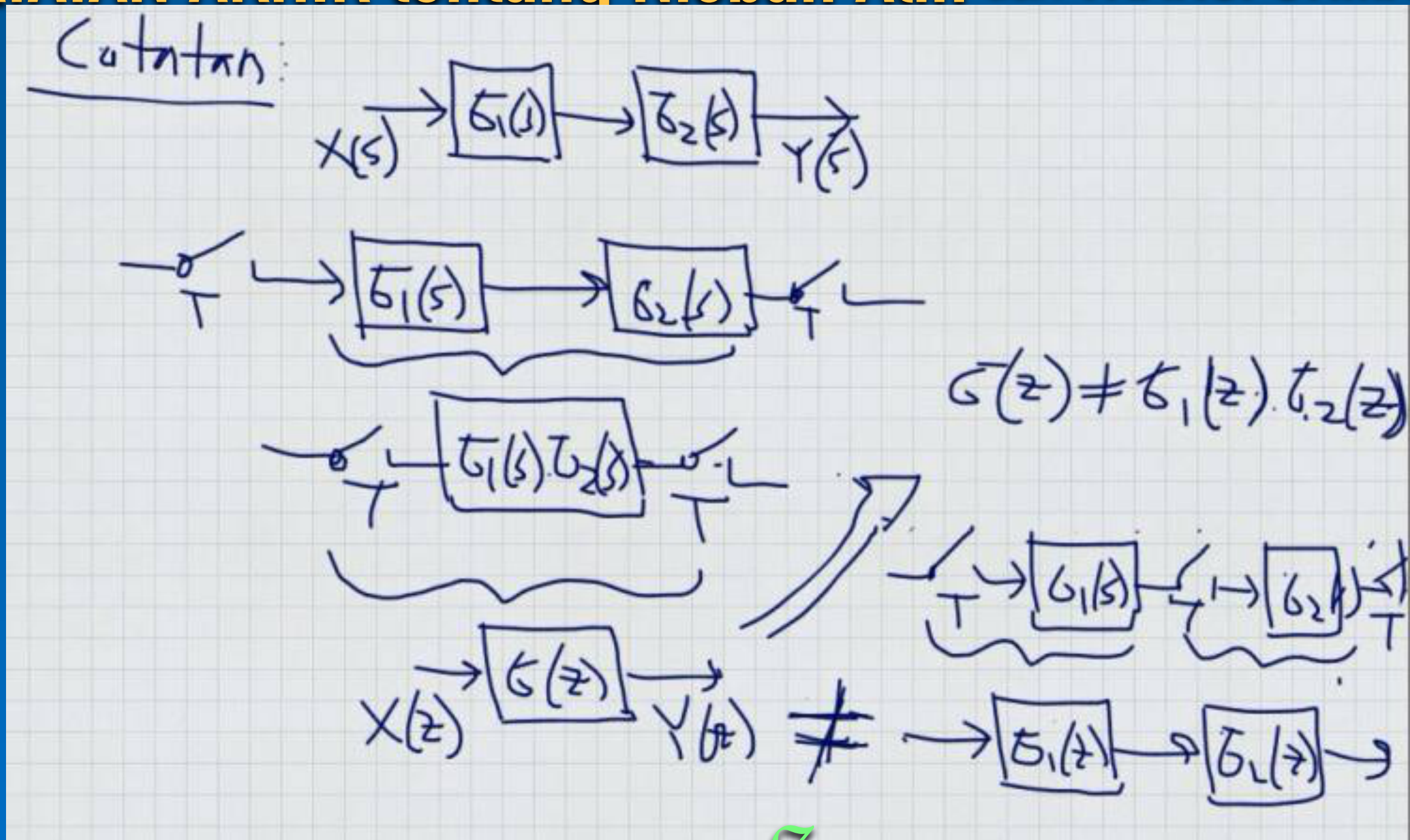
Untuk memperoleh nilai $y(k)$, dapat digunakan tabel "lembar kerja" (spread sheet)

k	x(k)	y(k)
0	1	0
1	1	1
2	1	4
3	1	10
4	1	19

$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$

1 + (3)(1) = 4
 1 + (3)(4) - (3)(1) = 10
 1 + (3)(10) - (3)(4) = 19

CATATAN AKHIR tentang Nisbah Alih dan TRANSFORMASI $\mathcal{Z}$



Jika $G_1(z)$ dan $G_2(z)$ TRANSFORMASI $\mathcal{Z}$ $G_1(s)$ dan $G_2(s)$, maka:

TRANSFORMASI $\mathcal{Z}$ $\{G_1(s) G_2(s)\}$ tidak sama dengan $G_1(z)G_2(z)$

3 (TIGA) BAGIAN MATERI KULIAH:

- **Bagian 1:** (Pekan 1 s/d 8 oleh RHZ)
- **Bagian 2:** (Pekan 9 s/d 16 oleh EJA)
- **Bagian 3:** Praktikum (INDIVIDU dan KELOMPOK)

MODUL PEMBELAJARAN

- **Bagian 1:** (Pekan 1 s/d 8 oleh RHZ)

- **MODUL 0: PENGANTAR KULIAH**
- **MODUL 1 Sistem Kendali Digital (SKD)**
 - Sub-MODUL 1A: Pengenalan SKD
 - Sub-MODUL 1B: Sejarah SKD
(ada **fotocopy-an** yang sudah dibagikan)
- **MODUL 2: Pemodelan SKD**
- **MODUL 3: Transformasi Z**

TTS

PRAKTIKUM

UJIAN FINAL

SELAMAT BELAJAR

Semoga SUKSES meraih PRESTASI!

