

* Koneksi Teks mika
 - Kuliah 05/11, 15/12, * Gawa
 - Praktek dan Kuis di Tmlra
 - UJIAN FINAL di Tmlra

→ Keterkendalian dan Keteramatan
 Controllability and observability

Suatu kendalian (plant) yang dimodelkan dengan model Ruang Keadaan $\dot{x} = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C = [7 \ 6 \ 4] \quad D = [0]$$

Transformasi Similitas $T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
 $\det(T) \neq 0$

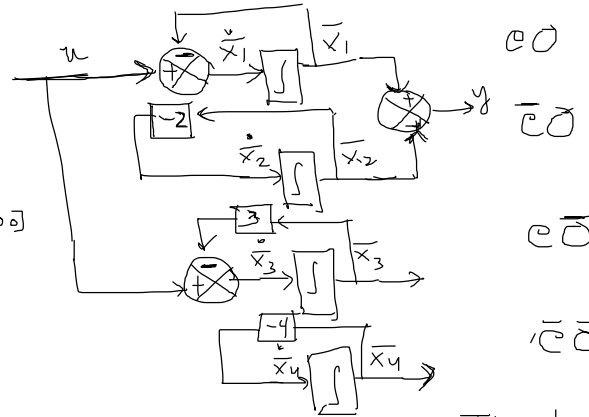
$$T^{-1} = \text{inv}(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hasil transformasi:

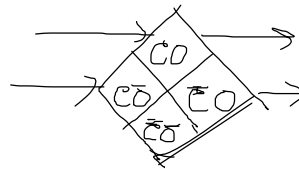
$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = CT^{-1} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{\bar{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}$$



* Jika bagian yang un-controllable ($\bar{e}0$ dan $\bar{e}0$) tidak stabil, maka tidak ada jalan untuk menstabilkannya



* Jika ada bagian yang un-observable ($\bar{e}0$ dan $\bar{e}0$), maka dapat dirancang suatu sistem OBSERVER (pengamat) sebagai bagian dari sistem kendali

* Matriks Keterkendalian dan Matriks Keteramatan

→ Matriks Keterkendalian (Controllability Matrix) P

$$P = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$A = [n \times n]$ $P = [n \times mn]$
 $B = [n \times m]$ Maka $n=4$ $m=2$
 $P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$ 4 baris
 8 kolom

Suatu kendalian sepenuhnya terkendali jika $\text{rank}(P) = n$
 (fully controllable)
 atau matriks P adalah matriks "full-rank"

"Rank" dari suatu matriks P adalah dimensi (ukuran) dari matriks bagian dari P yang terbesar dengan determinan tidak nol, yang diperoleh dari menghapus baris/kolom matriks P

Misalnya $P [4 \times 8] \rightarrow$ jika 4 kolom dihapus
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(P) \neq 0$
 $\text{rank}(P) = 4$
 (Full-rank)

Jika matriks $P [n \times n]$, $m=1$, single input,
 maka P full-rank jika $\det(P) \neq 0$
 ($\text{rank}(P) = n$)

Contoh: Tentukan apakah kendalian di bawah ini sepenuhnya terkendali dan teramati atau tidak.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x + [0] u$$

Jawab: a) Matriks keterkendalian:

$$P = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\det(P) = 1 \neq 0$, berarti $\text{rank}(P) = 2$,
 maka kendalian di atas adalah
 sepenuhnya terkendali krm P "full rank"

* Matriks Keteramatan Q

(Observability matrix)

$$Q = [C^T \ A^T C^T \ A^{2T} C^T \ \dots \ A^{(n-1)T} C^T]$$

$$A [n \times n] \quad A^T [n \times n] \quad C [1 \times n]$$

$$C [1 \times n] \quad C^T [n \times 1]$$

$$Q = [n \times k] \quad [n \times k] \quad [n \times k] \quad \dots \quad [n \times k]$$

$$Q = [n \times nb] \quad \text{Maka } n=4 \quad b=2$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

$$Q = [4 \times 8]$$

b) Matriks keteramatan

$$Q = [C^T \ A^T C^T]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(Q) = 1 \neq 0$, Q: "full rank",
 kendalian sepenuhnya teramati, (completely observable)