

**CATATAN KULIAH
(*CLASSNOTES*)**

**SISTEM KENDALI
(*Control Systems*)**

Rhiza S. Sadjad

2016

RENCANA PEMBELAJARAN

NAMA MATAKULIAH : **SISTEM KENDALI**
KODE MATAKULIAH : **304D433 (Tahun III, Semester Awal, 3 SKS, TK)**
DOSEN-DOSEN : 1. Dr. Ir. H. Rhiza S. Sadjad, MSEE
2. Hj. Andi Ejah Umraeni Salam, ST, MT

1. DAFTAR PUSTAKA:

1. **Friedland**, Bernard, "*Control System Design*", McGraw-Hill Book Company, NY
2. **Ogata**, Katsuhiko, "*Modern Control Engineering*", Prentice Hall of India, New Delhi, atau terjemahannya (jilid 2) terbitan Penerbit Erlangga, Jakarta.
3. **Kuo**, Benjamin C., "*Automatic Control Systems*", Prentice Hall Inc., NJ atau terjemahannya terbitan PT. Prehalindo, Jakarta.

2. TUJUAN:

Penyajian matakuliah ini bertujuan memberi kesempatan kepada mahasiswa Program Studi Teknik Elektro – khususnya yang berminat mengambil konsentrasi Teknik Komputer, Kendali dan Elektronika (TK) – untuk mempelajari analisis dan desain sistem kendali lanjutan dengan pendekatan teori kendali "modern".

3. SILABUS SINGKAT:

Pemodelan ruang keadaan (*review*), konversi model, solusi persamaan differensial order pertama (*review*), matriks transisi, transformasi similaritas, kestabilan, keterkendalian dan keteramatan, umpan-balik peubah keadaan dan desain penempatan *pole*, sistem pengamat: *full-order, reduced-order*.

4. KOMPETENSI UTAMA:

1. Menguasai dasar-dasar teori kendali, baik yang klasik mau pun modern, serta aplikasinya dalam analisis dan perancangan sistem kendali
2. Mampu memakai paket-paket perangkat lunak komputer untuk pemodelan dan simulasi masalah-masalah Teknik Elektro khususnya dan masalah rekayasa pada umumnya

5. KOMPETENSI PENDUKUNG:

1. Mampu berwirausaha/bekerja sendiri/bekerja-sama dalam bidang Teknik Elektro.
2. Mampu menggunakan bahasa-bahasa pemrograman yang umum digunakan dalam dunia engineering

6. LAINNYA:

Memiliki jiwa kepemimpinan, peneliti dan entrepreneur serta mampu bersaing

7. PEKANAN:

I. Pembelajaran di Kelas (TATAP-MUKA: 2 SKS)

Pekan ke	Topik	Sub-topik
1	PENGANTAR KULIAH	Administrasi Perkuliahan
2	Representasi Ruang Keadaan (<i>State Space Representation</i>)	- Representasi Ruang Keadaan (<i>review</i>)
3		- Contoh-contoh
4		- Konversi model: - Nisbah Alih ke Ruang Keadaan - Ruang Keadaan ke Nisbah Alih
5	Analisis Sistem Kendali	- Solusi Persamaan Differensial Order Pertama
6		- Matriks Transisi
7		- Transformasi Similaritas
8		- Kestabilan dan letak nilai-eigen pada bidang kompleks
9	Desain Sistem Kendali	- Keterkendalian dan Keteramatan
10		- Umpan-balik peubah keadaan
11	MIDTEST	(<i>open book, 100 menit, di kelas</i>)
12	Desain Sistem Kendali (lanjutan)	- Contoh-contoh
13		- Pengamat linier, struktur dan sifat
14		- Prinsip pemisahan
15		- <i>Full-Order Observer</i>
16		- <i>Reduced-Order Observer</i>
	FINAL	(<i>open book, 100 menit, sesuai jadwal</i>)

I. Pembelajaran di Laboratorium (PRAKTIKUM: 1 SKS)

Pekan ke	Topik	Sub-topik
9	PEMBAGIAN KELOMPOK	Penjelasan kegiatan praktikum
10	Praktikum INDIVIDUAL	- Pemodelan dengan MATLAB dan Simulink:
11		- Analisis model ruang keadaan
12		- Desain dan simulasi
13	Praktikum KELOMPOK	- Pengenalan kendalian (Sistem Motor Servo MS150)
14		- Pemodelan Sistem Motor Servo MS150
15		- Simulasi dengan SIMULINK: Servo Kecepatan dan Servo Posisi
16		- Percobaan dan Pengamatan
		- Penyusunan Laporan

SISTEM KENDALI (3 sks)

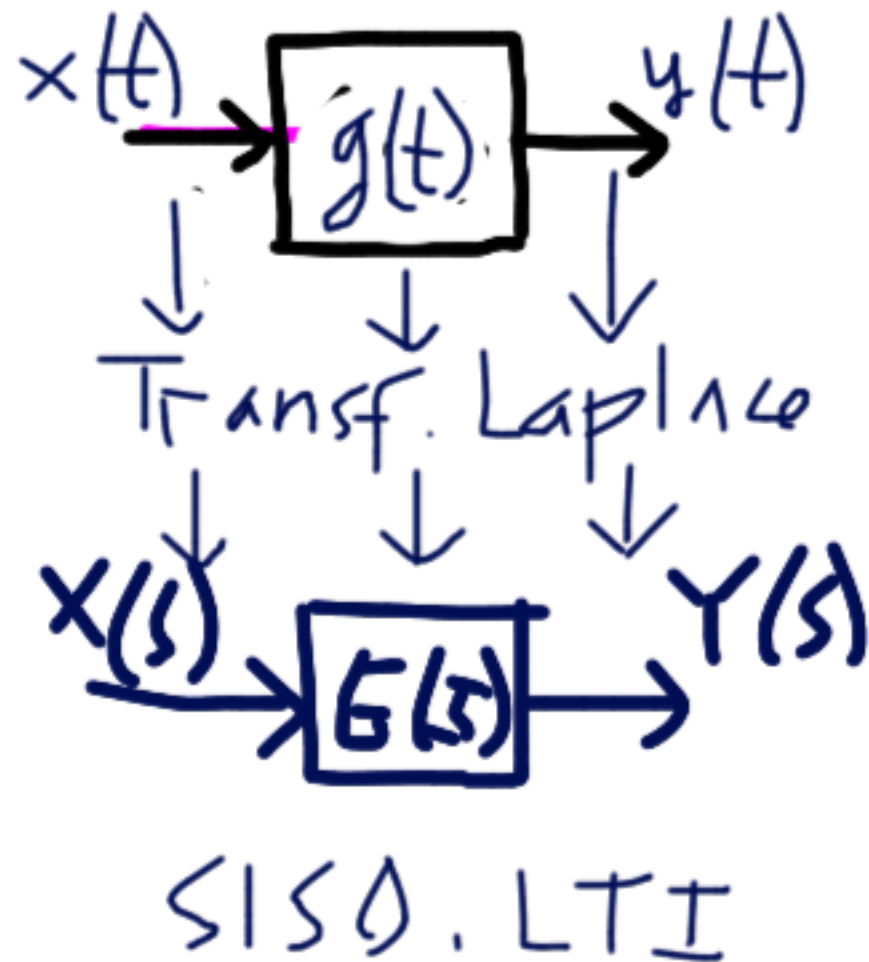
1 SKS tatap muka $8 \times 8 \times$ $2K + 1P$ RHZ $\rightarrow$ Test 1+2
1 SKS Praktikum $\rightarrow$ IND
KEK $\rightarrow$ LSKI.

Website = <http://www.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/>
cari folder: Sistem-Kendali

Buku Referensi: "Control System Design" oleh
Bernard Friedland

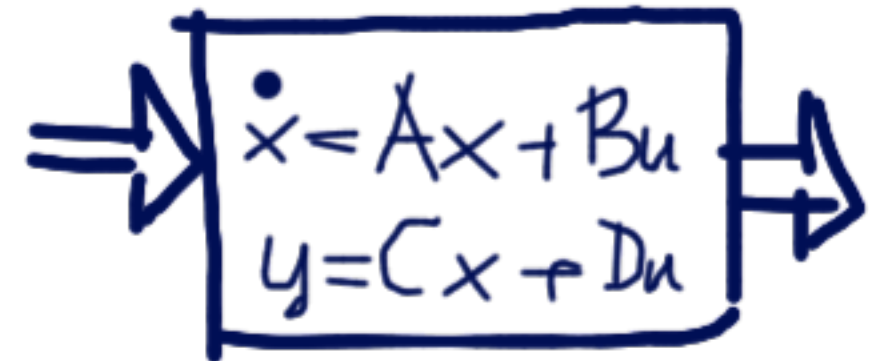
muthiakhannza; amimuddin@gmail.com

* Model NISBAH ALIH dan Model RUANG KEADAAN



semua
konversi

SISO, LTI
MIMO, LTV
Taklin



← SISO, LTI

* Model Ruang Keadaan ke Model Nisbah Alih

>>> ss2tf <-

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu &<- \text{Pers. Keadaan} \\ y &= Cx + Du &<- \text{Pers. Keluaran} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SISO} &\Rightarrow u[1 \times 1] \quad y[1 \times 1] \quad x[n \times 1] \rightarrow A[n \times n], B[n \times 1] \\ \text{LTI} &\Rightarrow A, B, C \text{ dan } D \text{ konstanta} \quad C[1 \times n], D[1 \times 1] \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Trans. Laplace:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ sX(s) - AX(s) &= BU(s) \rightarrow \underbrace{[sI - A]}_{[n \times n]} X(s) = \underbrace{BU(s)}_{[n \times 1]} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} [sI-A]^{-1} & [sI-A] & X(s) \\ [n \times n] & [n \times n] & [n \times 1] \end{matrix}}_I = \underbrace{[sI-A]^{-1}}_{[n \times n]} \underbrace{B}_{[n \times 1]} U(s)$$

$$X(s) = [sI-A]^{-1} B U(s)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$Y(s) = C X(s) + D U(s)$$

$$= \underbrace{C [sI-A]^{-1} B}_{[1 \times 1]} U(s) + \underbrace{D}_{[1 \times 1]} U(s)$$

$$= [C [sI-A]^{-1} B + D] U(s) = G(s) U(s)$$

Model Nisbakh Alih :

$$G(s) = [C [sI-A]^{-1} B + D]$$

Contoh =
SISO
LTI

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} u$$

$$\left. \begin{array}{l} n=2 \\ m=1 \\ k=1 \end{array} \right\} \text{SISO}$$

Tentukan $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ dengan $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$
 $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$

Jawab: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$u(t) \triangleq u$$

$$y(t) \triangleq y$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

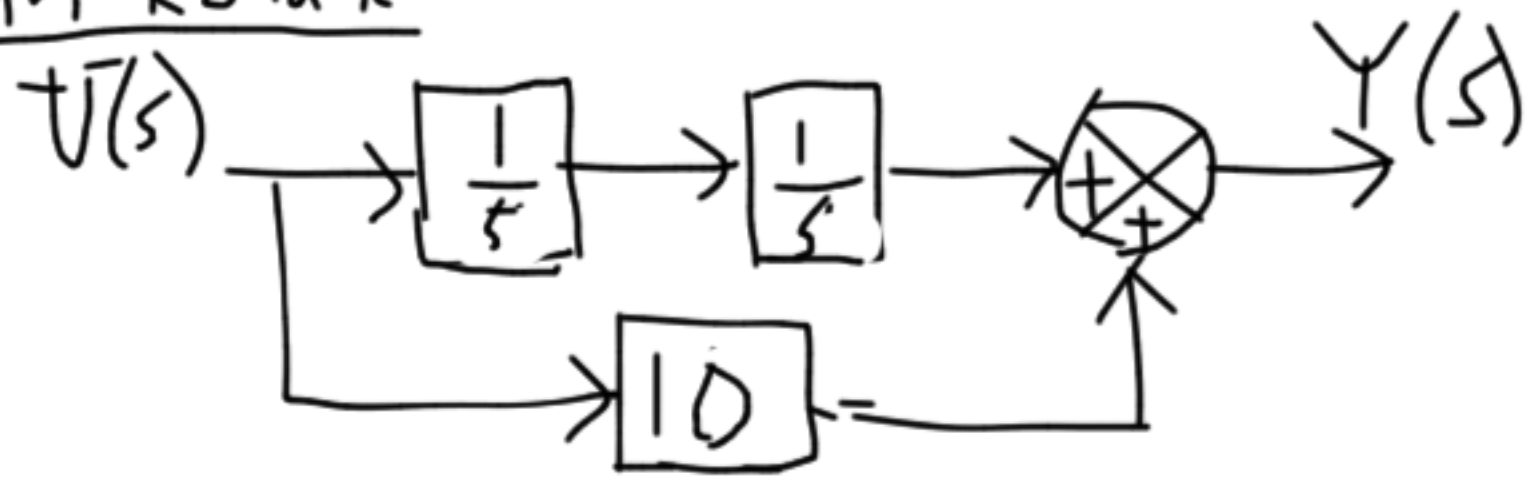
$$[sI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

check:

$$[sI - A][sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = [0 \ [1 \ I - A]^{-1} B + D] \\
 &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 10 \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 10 \\
 &= \frac{1}{s^2} + 10 = \frac{10s^2 + 1}{s^2} //
 \end{aligned}$$

Bagan kotak :



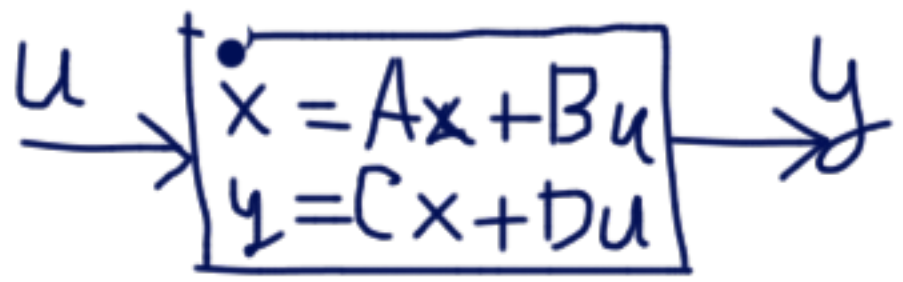
* Model Nisbah Alih ke Model Ruang Keadaan

>>> tf2ss (Transfer Function to State Space)



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

⇒



koefisien: $a_0 - a_n, b_0 - b_m \in \text{Real}$

Untuk sistem "realistik"

$m > n$ ✓

$m \leq n$

$m < n$ ✓

$m = n$ ✓

→ "High Pass Filter" yang menyerap derau (noise) frekuensi tinggi, sehingga jenuh dan tidak berfungsi



* $m < n$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X(s)}$$

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ = isyarat sembarang

$$\left[\begin{array}{l} \text{Jika } Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s) \\ \text{maka } U(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X(s) \end{array} \right]$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Jika } a=3 \\ \text{maka } b=4 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow U(s) = a_n s^n X(s) + a_{n-1} s^{n-1} X(s) + \dots + a_1 s X(s) + a_0 X(s)$$

Laplace Inverse:

$$u(t) = a_n \underbrace{\frac{d^n x(t)}{dt^n}}_{x_n} + a_{n-1} \underbrace{\frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}}_{x_{n-1}} + \dots + a_1 \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{x_2} + a_0 \underbrace{x(t)}_{x_1}$$

State assignment (menunjukkan perubahan keadaan)

masukan: $u(t) \triangleq u$ keluaran $y(t) \triangleq y$

perubahan keadaan: $x_1 \triangleq x(t) \rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dx(t)}{dt} = x_2$

$$x_2 \triangleq \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \dot{x}_2 = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = x_3$$

$$x_3 \triangleq \frac{d^2x(t)}{dt^2} \rightarrow \dot{x}_3 = \frac{d^3x(t)}{dt^3} = x_4$$

$$\vdots$$
$$x_{n-2} \triangleq \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \rightarrow \dot{x}_{n-2} = \frac{d^nx(t)}{dt^n} = x_{n-1}$$

$$x_{n-1} \triangleq \frac{d^nx(t)}{dt^n} \rightarrow \dot{x}_{n-1} = \frac{d^{n+1}x(t)}{dt^{n+1}} = x_n$$

$$\dot{x}_n = \frac{d^{n+1}x(t)}{dt^{n+1}} = \dots ?$$

$$u = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + a_{n-2} x_{n-2} + \dots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + a_0 x_0$$

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \frac{a_2}{a_n} x_3 - \dots - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n +$$

Pers. Keadaan

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2} \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

$A[n \times n]$ $B[n \times 1]$

Bentuk Matrix :

$$A = \begin{bmatrix} \delta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \\ \boxed{\square \square \square} & \square & \dots & \dots & \dots & \square & \square \end{bmatrix}$$

$[n \times n]$

"1" off diagonal
baris ke-n NONZERO

Jordan
companion
matrix

Pers. Keluaran :

$$Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

Laplace Inverse

$$y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{m-1} x_m + b_m x_{m+1}$$

$$y = \underbrace{[b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{m-1} \ b_m \ 0 \ 0 \ 0]}_{\emptyset} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ x_n \end{bmatrix} + Du$$

$$y = Cx + Du$$

↑

Jika $m = n-1 \rightarrow n = m+1$

$$C = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{m-1} \ b_m]$$

↑
 b_{n-1}

penuh n .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$D = [\emptyset]$$

Contoh: Tentukan model Ruang Keadaan dengan matrix A Jordan Companion dari model Nisbah Alih.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s^5 + 8s^4 + 6s^3 + 4s^2 + 2s + 1}{8s^8 + 7s^6 + 6s^4 + 5s^2 + 4}$$

Jawab:

$$\left. \begin{matrix} m=5 \\ n=8 \end{matrix} \right\} m < n$$

$$n=8 \longrightarrow \begin{matrix} a_0=4 \\ a_1=0 \\ a_2=5 \\ a_3=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_4=6 \\ a_5=0 \\ a_6=7 \\ a_7=0 \end{matrix} \quad a_8=8$$

$$\begin{array}{l} m=5 \\ \hline b_0=1 \\ b_1=2 \\ b_2=4 \\ b_3=6 \\ b_4=8 \end{array} \quad b_5=10$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = [\emptyset]$$

$$A = [8 \times 8] \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & 0 & -5/8 & 0 & -0,75 & 0 & -7/8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [8 \times 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \times 8] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \phi & \phi \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{b_0 \ 5/4 \ b_5}$
 $\underbrace{\quad\quad}_{\text{tambahan}}$

Kasus $m=n$

Contoh: $G(s) = \frac{16s^8 + 10s^5 + 8s^4 + 6s^3 + 4s^2 + 2s + 1}{8s^8 + 7s^6 + 6s^4 + 5s^2 + 4}$

Polynomial s penyebut sama dengan contoh sebelumnya $\rightarrow$ matrix A dan B harus sama dengan contoh sebelumnya

Bagaimana dengan matrix C dan D

$m=8 \rightarrow$

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8

$[1 \times 8]$

$b_0 = 1$
 $b_1 = 2$
 $b_2 = 4$
 $b_3 = 6$
 $b_4 = 8$
 $b_5 = 10$
 $b_6 = 0$
 $b_7 = 0$
 $b_8 = 16$

???

$$G(s) = \underbrace{G'(s)}_{\text{kasus } m < n} + [\overline{D}] \quad \swarrow \text{konstanta}$$

$$\frac{g_0}{6} = \cancel{A} + 15$$

$$\leftarrow g_0 = 15 \times 6 + 0$$

$$\leftarrow g_0 = 12 \times 7 + 6$$

$$\frac{g_0}{7} = \frac{6}{7} + 12$$

$$G(s) = G'(s) + \boxed{D}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 6 \overline{) 90} \\ \underline{6} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 7 \overline{) 90} \\ \underline{7} \\ 20 \\ \underline{14} \end{array}$$

$$8s^8 + 7s^6 + 6s^4 + 5s^2 + 4$$

$$\boxed{2}$$

$$\begin{array}{r} 16s^8 \\ 16s^8 + 14s^6 + 10s^5 + 8s^4 + 6s^3 + 4s^2 + 2s + 1 \\ \hline -14s^6 + 10s^5 - 4s^4 + 6s^3 - 6s^2 + 2s - 7 \end{array}$$

$$\underbrace{-14s^6 + 10s^5 - 4s^4 + 6s^3 - 6s^2 + 2s - 7}_{m < n}$$

$$G(s) = \frac{-14s^6 + 10s^5 - 4s^4 + 6s^3 - 6s^2 + 2s - 7}{8s^8 + 7s^6 + 6s^4 + 5s^2 + 4} + 2$$

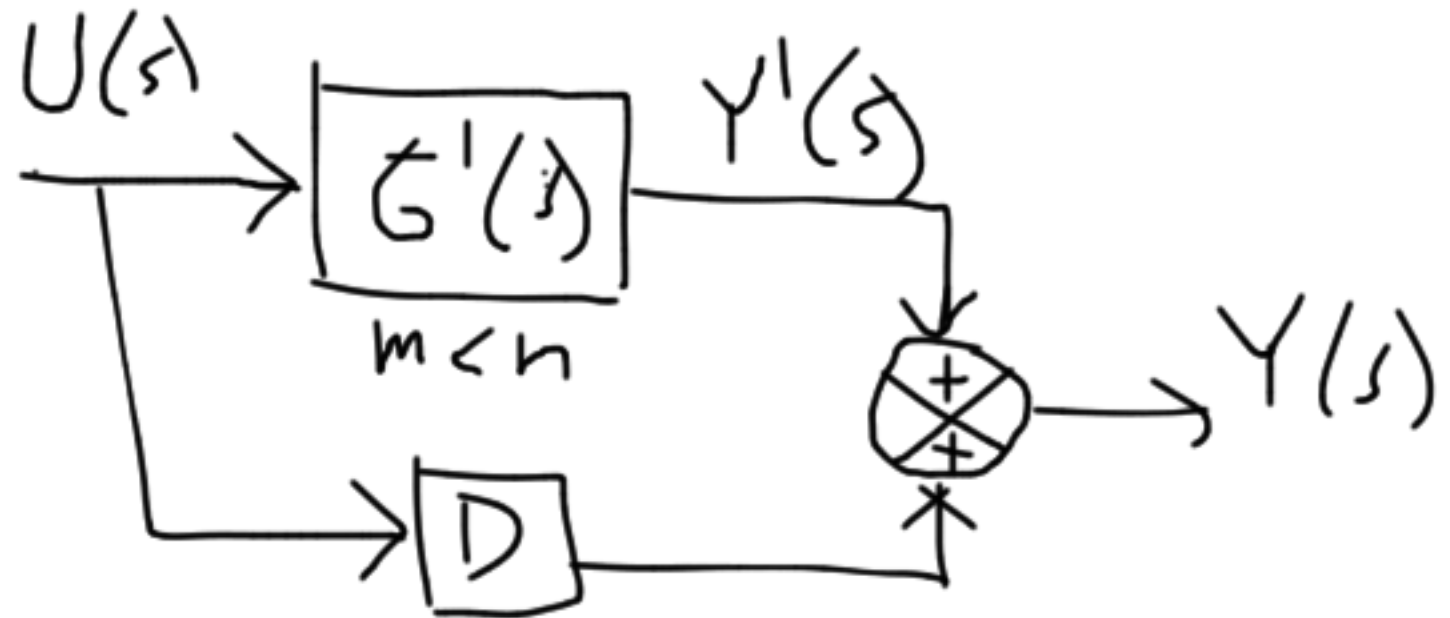
$$b'_0 = -7 \quad b'_1 = 2 \quad b'_2 = -6 \quad b'_3 = 6 \quad b'_4 = -4 \\ b'_5 = 10 \quad b'_6 = -14$$

$$C = [-7 \ 2 \ -6 \ 6 \ -4 \ 10 \ -14 \ \emptyset]$$

b'_0 / b'_7

tambahkan

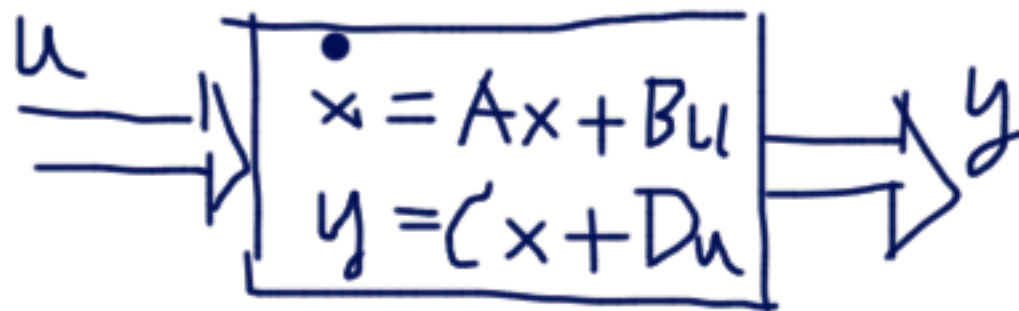
$$D = [2]$$



* TRANSFORMASI SIMILARITAS



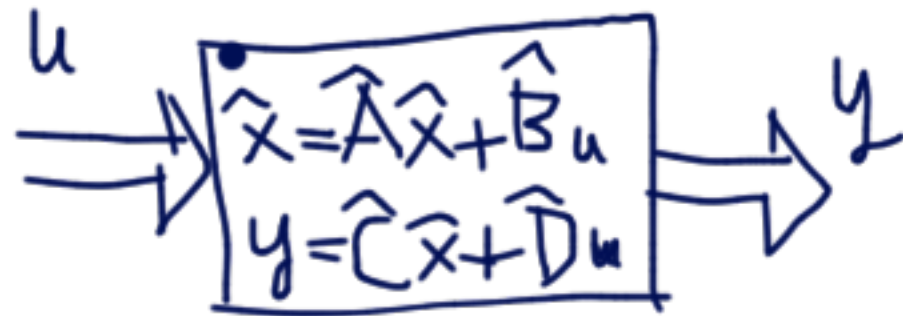
$\Downarrow$ dimodelkan



I

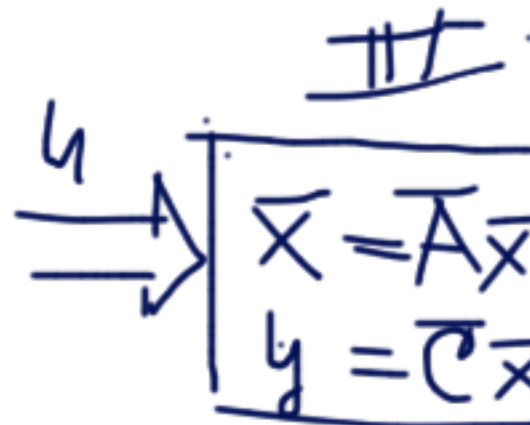
peubah keadaan x bisa dipilih

(pemilihan ini disebut state assignment)



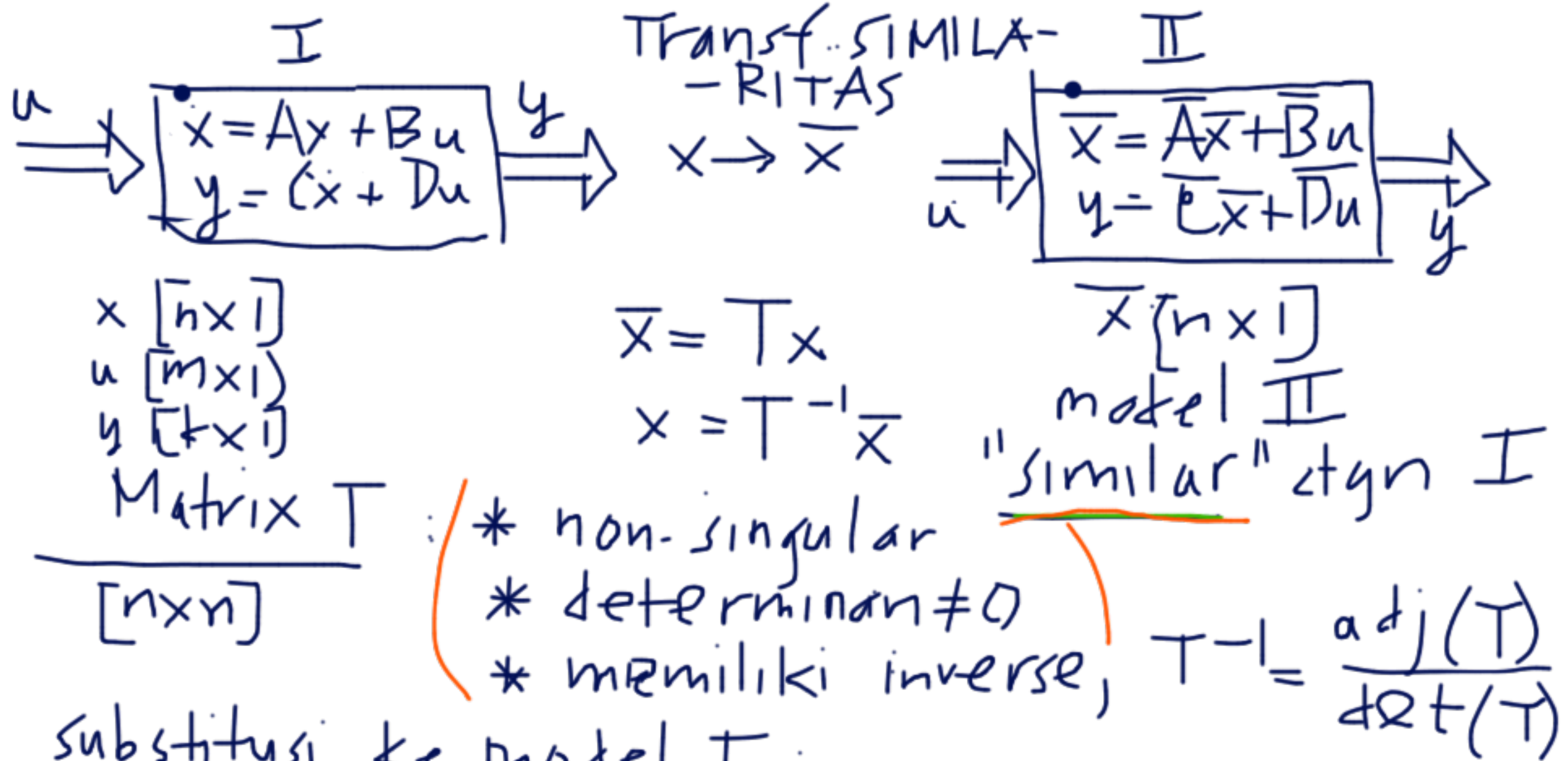
II

dipilih $\bar{x}$



III

Model I, II dan III sah



substitusi ke model I :

$$T^{-1}\dot{\bar{x}} = AT^{-1}\bar{x} + Bu \rightarrow TT^{-1}\dot{\bar{x}} = TAT^{-1}\bar{x} + TBu$$

$$y = CT^{-1}\bar{x} + Du = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u$$

$$\boxed{\bar{C} = CT^{-1}} \quad \boxed{\bar{D} = D}$$

$$\boxed{\bar{A} = TAT^{-1}} \quad \boxed{\bar{B} = TB}$$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
 $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

Tentukan: $\bar{A}$, $\bar{B}$ dan $\bar{C}$ dengan $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(T) = -1 \neq 0 \rightarrow \text{OK}$

$$T^{-1} = \frac{\text{adj}(T)}{\det(T)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

check: $TT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Tx \\ \bar{B} &= TB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Model I dan Model II adalah TAK SERUPA tapi sebenarnya SAMA (SIMILAR).

Yang SAMA dari kedua Model di atas adalah persamaan karakteristik dari Matrix A pada Model I dan Matrix A pada Model II, atau kedua matrix tersebut mempunyai nilai-eigen yang SAMA.

Persamaan Karakteristik: $\det[\lambda I - A] = 0$

λ = nilai-eigen matrix A

$$\det \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda(\lambda + 3) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1$$

← $P_K^{T \times K}$ / $K \times K$

Bgm dengan matrix $\overline{A}$?

$$\det \left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$\lambda_1 = -1$
 $\lambda_2 = -2$

$$\underline{\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0}$$

Bgm dengan matrix $\bar{A}$?

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$\lambda_1 = -1$
 $\lambda_2 = -2$

$$\underline{\underline{\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0}}$$

Materi selanjutnya:

* Solusi dari Pers. Keadaan ✓

* Kestabilan ✓ open book

* Ilmpn Balik Peubah Keadaan → MIDTEST → 10/11/2016

→ 17/11/2016 → FINAL ✓

→ Praktikum Individu ✓

PRAKTIKUM KELOMPOK (4 kol @ 5 org) → Selasa TKP ✓

* Solusi pers. keadaan

PD: $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$, $x(0) = X_0$

Dicari solusi $x(t) = \dots$?

Analisis:

$$\int \frac{dx(t)}{x(t)} = \int a dt = at + C$$

$$\ln[x(t)] = at + C$$

$$e^{\log[x(t)]} = e^{at+C}$$

$$x(t) = e^{at+C} = e^C e^{at} = A e^{at}$$

$$t=0 \rightarrow x(0) = A e^0 = A = X_0$$

Solusi khusus = $x(t) = X_0 e^{at}$ ✓

check:

$$* t=0 \rightarrow x(0) = X_0 e^0$$

$$* x(t) = X_0 e^{at} = X_0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= X_0 a e^{at} \\ &= a [X_0 e^{at}] \\ &= ax(t) \quad \checkmark \end{aligned}$$

→ Solusi umum

$$x(t) = X_0 \left(1 + at + \frac{1}{2} a^2 t^2 + \frac{1}{6} a^3 t^3 + \frac{1}{24} a^4 t^4 + \dots + \frac{1}{n!} a^n t^n \right)$$

Check:

$$* t=0 \rightarrow x(0) = X_0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} * \frac{dx(t)}{dt} &= X_0 \left(a + a^2 t + \frac{1}{2} a^3 t^2 + \frac{1}{6} a^4 t^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} a^n t^{n-1} \right) \\ &= a X_0 \left(1 + at + \frac{1}{2} a^2 t^2 + \frac{1}{6} a^3 t^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} a^{n-1} t^{n-1} \right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{x(t)} \\ &= a x(t) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Artinya: $\underline{e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2} a^2 t^2 + \frac{1}{6} a^3 t^3 + \dots}$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

Persamaan Keadaan

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$u=0 \text{ (no input)} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \underset{\substack{\uparrow \\ [n \times n]}}{\mathbf{A}} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underset{[n \times n]}{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{x}(t)}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = X_0$$

$$x(t) = X_0 \left(I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{6} A^3 t^3 + \frac{1}{24} A^4 t^4 + \dots \right)$$

check:

$$* x(0) = X_0 (I + 0 + 0 + \dots) = X_0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} * \frac{dx(t)}{dt} &= X_0 \left(A + A^2 t + \frac{1}{2} A^3 t^2 + \frac{1}{6} A^4 t^3 + \dots \right) \\ &= AX_0 \left(I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{6} A^3 t^3 + \dots \right) \\ &= Ax(t) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{6} A^3 t^3 + \dots \equiv [e^{At}]_{\text{matriks } [n \times n] \text{ + transisi}}$$

Solusi (tanpa input) $\rightarrow$ $x(t) = X_0 e^{At}$ $\rightarrow$ homogenous

Dengan masukan $u(t) \neq 0$,

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

Misalkan solusi non-homogenous:

$$x(t) = e^{At} c(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{A e^{At} c(t)} + e^{At} \frac{dc(t)}{dt}$$

$$= \cancel{Ax(t)} + e^{At} \frac{dc(t)}{dt} = \cancel{Ax(t)} + Bu(t)$$

$$[e^{At}] \frac{dc(t)}{dt} = Bu(t)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = [e^{At}]^{-1} Bu(t)$$

$$c(t) = \int [e^{At}]^{-1} Bu(t) dt$$

$$e^{-At} \equiv [e^{At}]^{-1}$$

Khusus $A \equiv$ matriks diagonal

$$= \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

$$[e^{At}] = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \dots$$

$$= I + \begin{bmatrix} d_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}d_1^2 t^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{2}d_n^2 t^2 \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & e^{d_2 t} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{d_n t} \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan transformasi similaritas maka setiap matrix A akan similar dengan matrix diagonal A_d :

$$A = T A_d T^{-1} \leftrightarrow A_d = T^{-1} A T$$

Jika $A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
adalah
nilai eigen

A_d DAN A

$\lambda = \text{Real, Im,}$
Kompleks

$\lambda_i = a_i \pm j b_i$ (kompleks
konjugasi)

$$[e^{A_1 t}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Jika SEMUA λ_i itu punya bagian Real
yang NEGATIF:

$$e^{\lambda_i t} = e^{a_i t + j b_i t} = \underbrace{e^{a_i t}}_{\text{menjauh nol}} e^{j b_i t}$$

untuk $t \rightarrow \infty$
jika $a_i < 0$

Karena kestabilan di-definisikan oleh tanggapan denput ($\text{input} = \delta(t)$) yang menuju nol utk $t \rightarrow \infty$, maka...

[Suatu SISTEM (kendali/kendaliannya) yang direpresentasikan dengan Model Ruang Keadaan akan STABIL jika SEMUA nilai eigen matrix A -nya memiliki bagian Real yang NEGATIF]

Contoh:

* Double Integrator :



$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

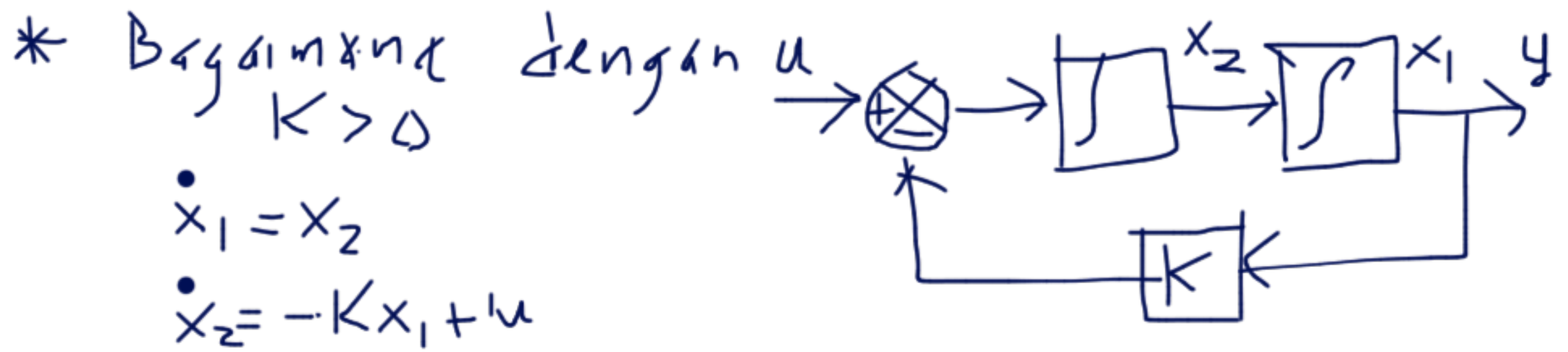
$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

non-negative

TIDAK
STABIL





$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{bmatrix}}_A x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ K & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda I - A] = \lambda^2 + K = 0$$

$$\lambda^2 = -K \rightarrow \lambda_1 = -j\sqrt{K}$$

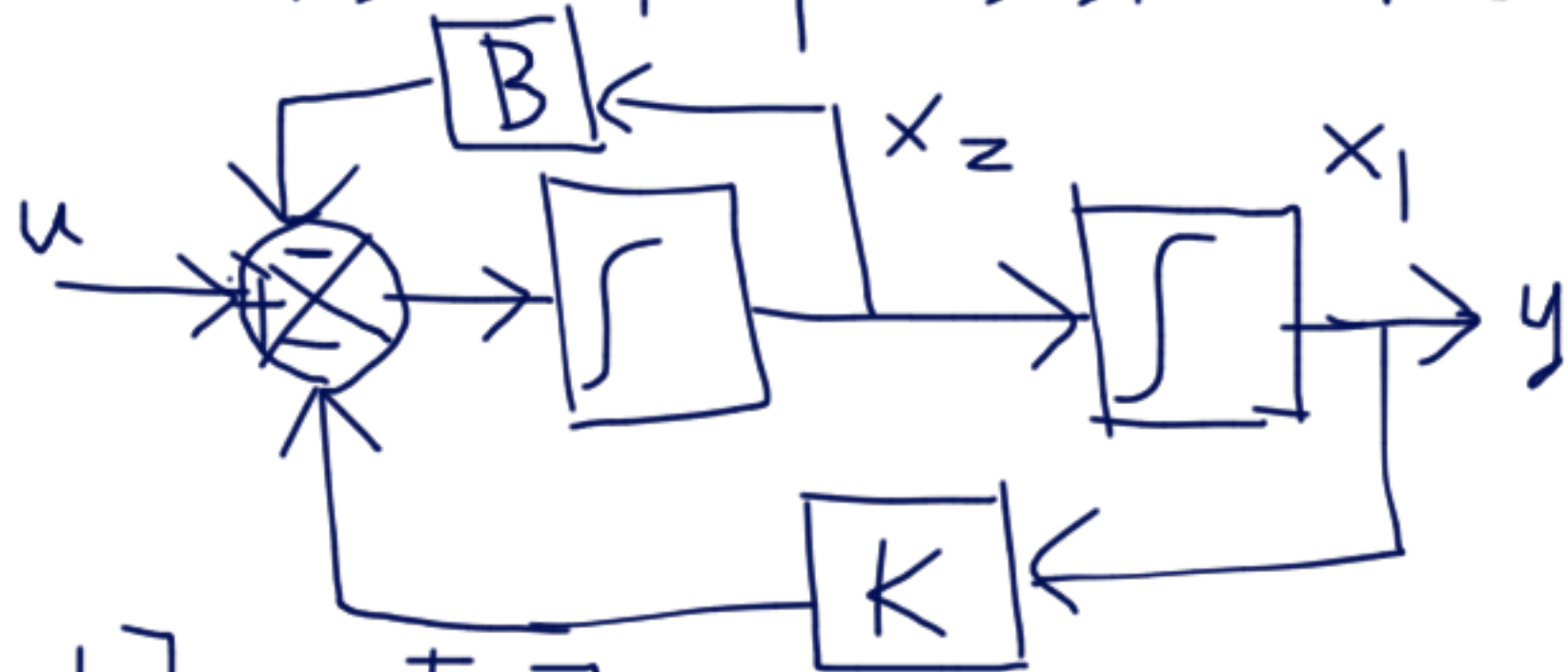
$$\lambda_2 = +j\sqrt{K}$$

TIDAK
STABIL



Bagian Real
non-negatif

* Tentukan nilai B supaya sistem berikut stabil:



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$\underbrace{\quad}_{[A]}$

$\rightarrow$ Berapa nilai B sehingga x_1 dan x_2 punya bagian Real $< 0 \rightarrow$ STABIL

Solusi non-homogenous.

$$x(t) = e^{At} c(t) = [e^{At}] \int [e^{-At}] B u(t) dt$$

Solusi homogenous + non-homogenous.

$$\underline{x(t)} = [e^{At}] x_0 + [e^{At}] \int [e^{-At}] B \underline{u(t)} dt$$

$$= [e^{At}] \left[x_0 + \int [e^{-At}] B \underline{u(t)} dt \right]$$

matrix
transisi

Pers. keluaran

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

$$y(t) = C [e^{At}] \left[x_0 + \int [e^{-At}] B u(t) dt \right] + D u(t)$$

* 24/11/2016 : $\rightarrow$ Mid susulan utk yg belum
 $\rightarrow$ Kuliah spt biasa utk yg lain

* UJIAN FINAL : * Materi kuliah selesai
* Praktikum (Kelompok + Individu) selesai.

24/11 } $\rightarrow$
01/12 }
08/12 $\rightarrow$!

* Contoh Keterkendalian & Keteramatan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -3 \\ & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrix Keterkendalian $P = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ rank < 4
 $\Rightarrow$ Matrix Keteramatan $Q = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ (A^T)^3 C^T]$
rank < 4

* Pers keadaan:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

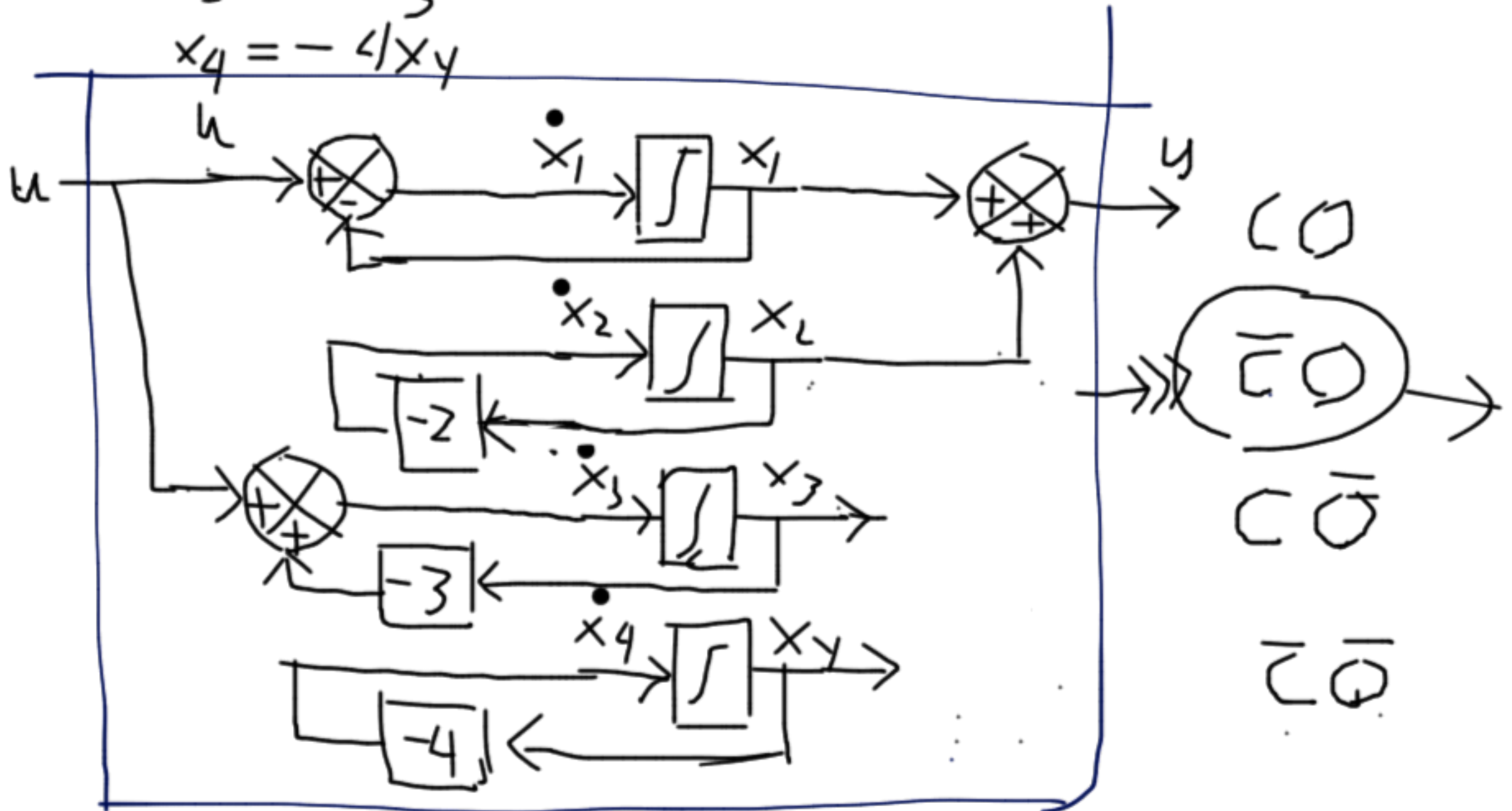
$$\dot{x}_2 = -2x_2$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + u$$

$$\dot{x}_4 = -4x_4$$

* Pers. Keluaran

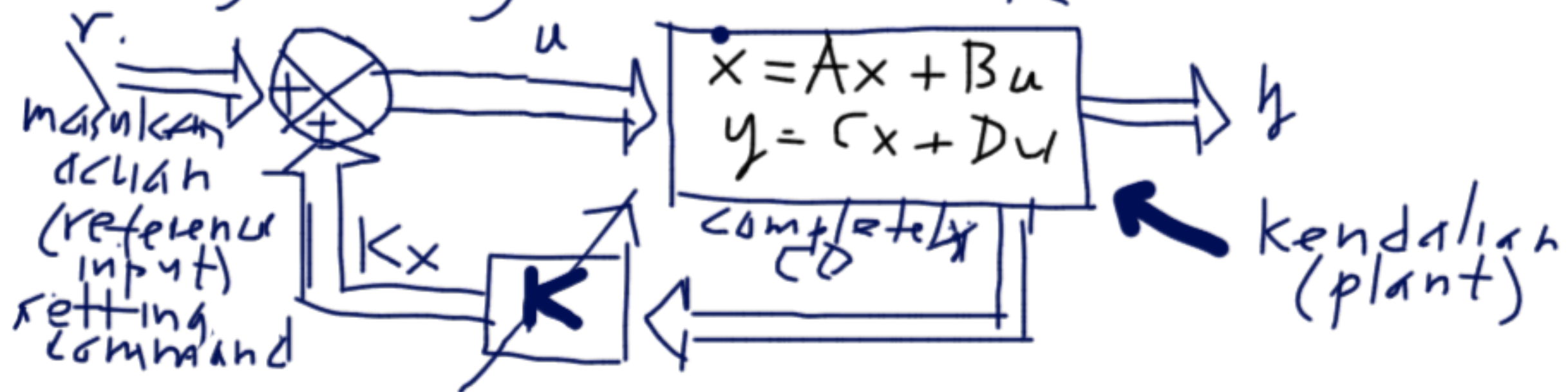
$$y = x_1 + x_2$$



* Sistem Kendali Umpan Balik Perubahan Keadaan

(State Variable Feedback)

Khusus untuk kendalian (plant) yang CO,
maka dengan umpan-balik perubahan keadaan,
nilai-eigen matriks $\bar{A}$ (closed-loop) bisa
ditempatkan (pole-placement) di mana
saja dalam bidang kompleks dengan
mengatur "gain-matrix" K



Dimensi gain-matrix K

Kendaliran mempunyai m masukan dan n peubah keadaan. $A[n \times n], B[n \times m]$

$[u] \rightarrow$ vektor $[m \times 1]$ $[x] \rightarrow$ vektor $[n \times 1]$

$$\begin{array}{c} u = r + Kx \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ [m \times 1] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ [n \times 1] \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ [m \times 1] \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ [m \times n] \end{array} \end{array}$$

$$K[m \times n]$$

$m = \text{jumlah masukan}$
 $n = \text{jumlah peubah keadaan}$

$[K]: m \text{ baris}$
 $n \text{ kolom}$

$m \times n$ buah penguit/redaman

Model Ruang Keadaan dari Sistem Daur Tertutup (Closed Loop)

Pers. Keluaran $y = Cx + Du \rightarrow$ tidak berubah

Pers. masukan :

$$B: [n \times m]$$

$$K: [m \times n]$$

$$BK: [n \times n]$$

$$\bar{A} = [A + BK]$$

nilai eigennya dapat diatur
(MATLAB: "place" >>> help place)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = r + Kx$$

$$\dot{x} = Ax + B[r + Kx]$$

$$= Ax + BKx + Br$$

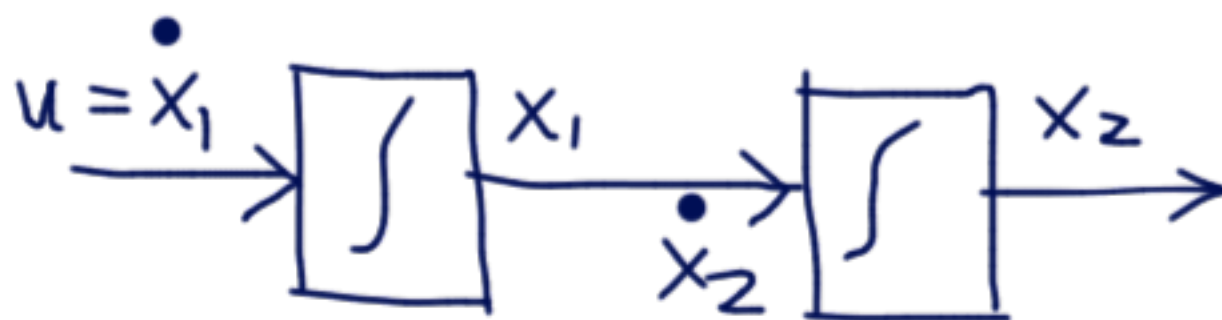
$$= [A + BK]x + Br$$

$$= \bar{A}x + Br$$

Contoh = "Double Integrator Plant"

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

$$y = x_2$$



tidak stabil
 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Controllability Matrix $P = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank } 2$

Observability Matrix $Q = [C^T \ A^T C^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank } 2$

completely
<0>



umpan balik

peubah keadaan

$$K [1 \times 2]$$

$$K = [K_1 \ K_2]$$

Misalnya kendalian di atas akan distabilkan dengan menempatkan nilai-eigen matrix $\bar{A}$ pada $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$\zeta = 1 \rightarrow$ critically damped

$$\bar{A} = [A + BK] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda I - \bar{A}]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - K_1 & -K_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \det[\lambda I - \bar{A}] = 0$$

$$-\lambda(\lambda - K_1) - K_2 = 0$$

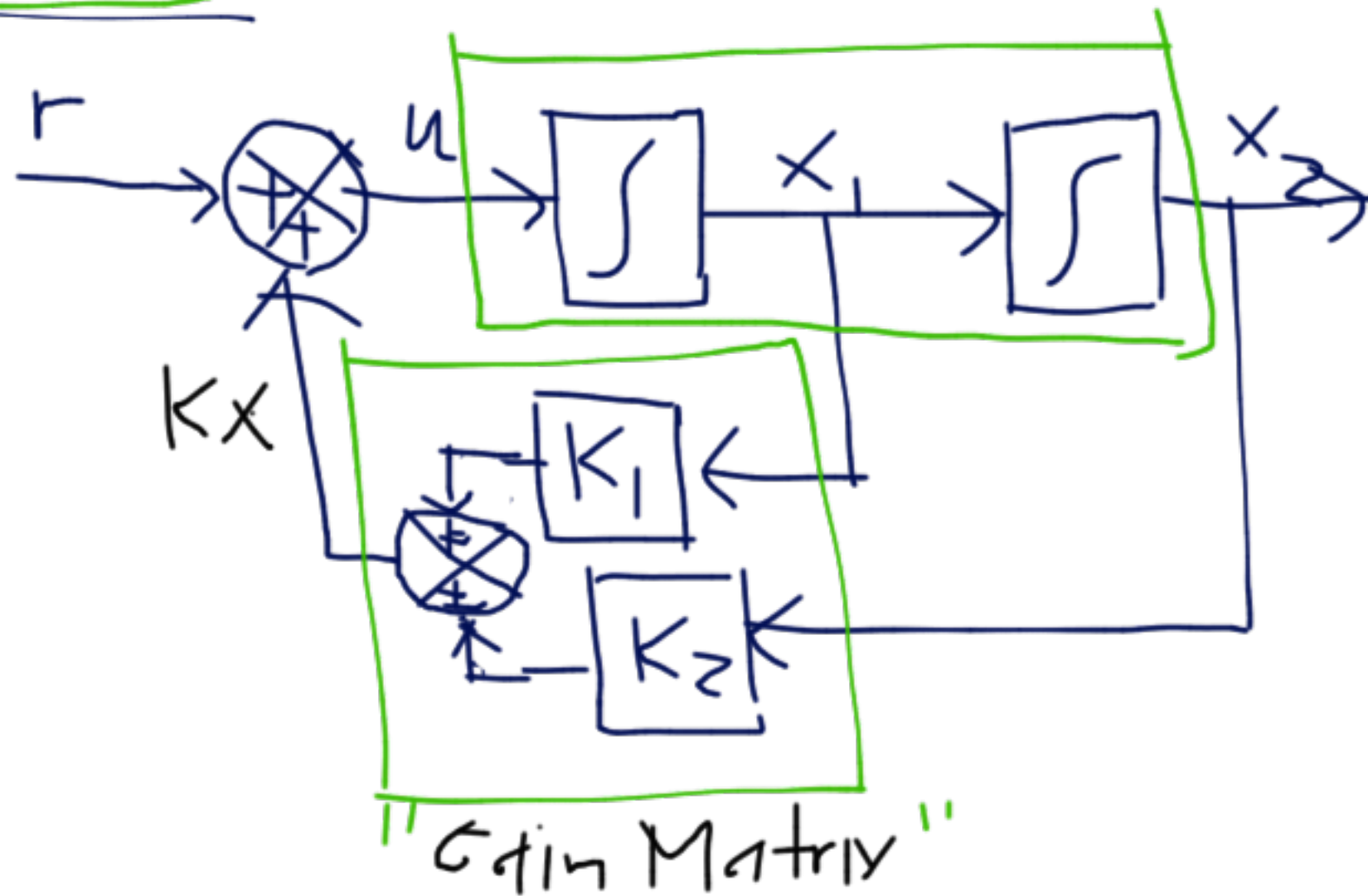
$$K_1 = -2 \quad K_2 = -1$$

$$\lambda^2 - K_1\lambda - K_2 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Bagan Kotak :



Note = sistem di atas ppt "Spring-Mass-Damper"

**CATATAN KULIAH
(*CLASSNOTES*)**

**SISTEM KENDALI
(*Control Systems*)**

Rhiza S. Sadjad

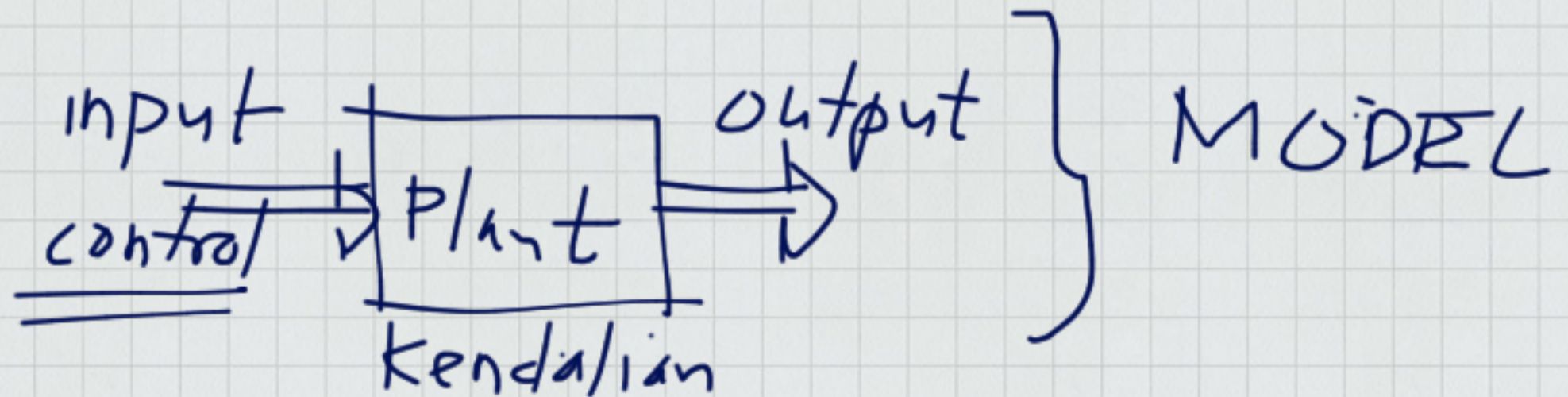
2017

SISTEM KENDALI 2017

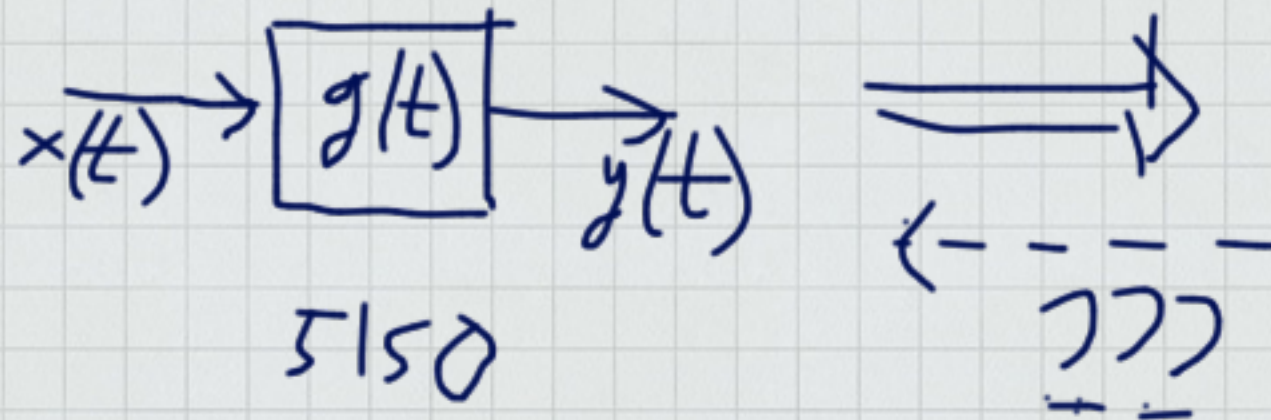
* Model Ruang Keadaan (State Space)

Teori Kendali $\left\{ \begin{array}{l} \text{"KLASIK"} \text{ (Model Nisbah Alih)} \\ \text{"MODERN"} \text{ (Model Ruang Keadaan)} \end{array} \right.$

Kendalian (PLANT)



NSBAH ALIH



linier

memertukan Transformasi
Laplace



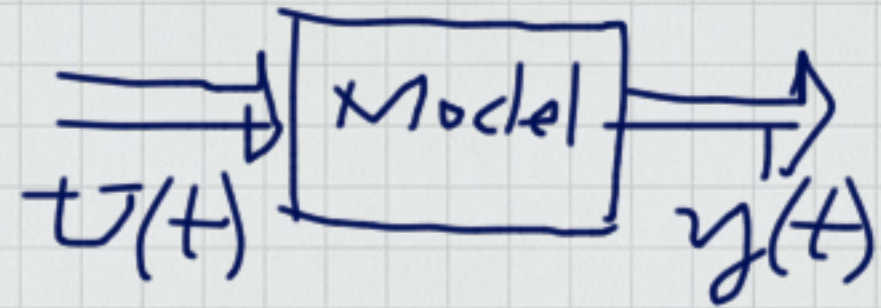
"pencil & paper"

$$G(s) = \frac{3}{25 + 4}$$



$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

RUANG KEADAAAN



MIMO

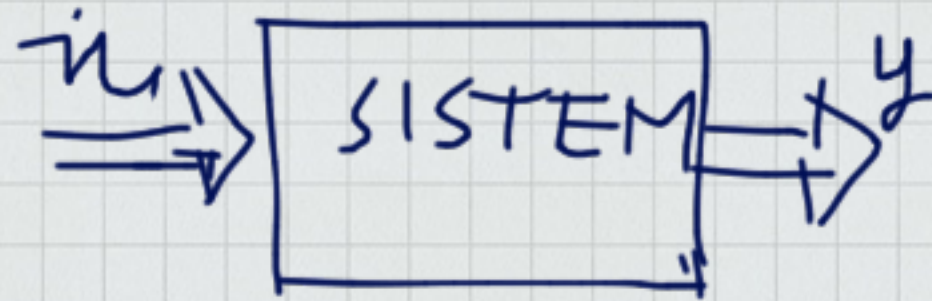
linier + tak linier

tidak perlu
Transformasi
(time domain)

"simulasi komputer"

Aljabar Matriks
Aljabar Linier

Model Ruang Keadaan



$$u = \text{vektor } [m \times 1]$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad m \geq 1$$

$$y = \text{vektor } [k \times 1]$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}$$

Model:

Pers. Keadaan
(State Equation)

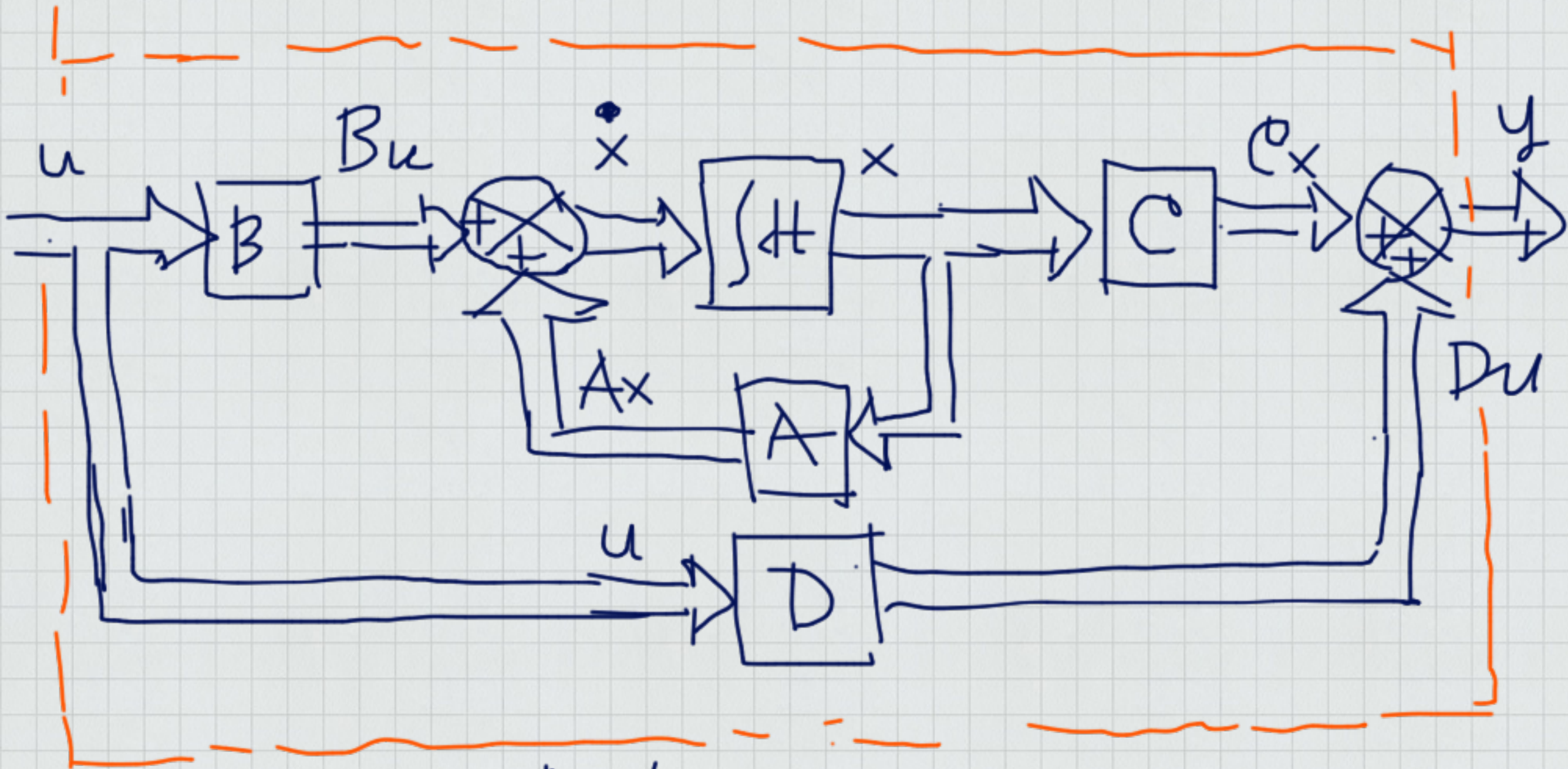
Pers. Keluaran
(Output Equation)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$x \equiv$ peubah keadaan = vektor $[n \times 1]$
(state variables)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} dx_1(t)/dt \\ dx_2(t)/dt \\ \vdots \\ dx_n(t)/dt \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

n-dynamics



$$\begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{bmatrix}$$

← operasi matrix

Pers. Keadaan:

$$\begin{array}{c} \downarrow [n \times 1] \\ \dot{x} = \underbrace{A}_{[n \times 1]} x + \underbrace{B}_{[n \times 1]} u \\ \uparrow [n \times 1] \end{array}$$

Pers. Keluaran:

$$\begin{array}{c} \downarrow [k \times 1] \\ y = \underbrace{C}_{[k \times 1]} x + \underbrace{D}_{[k \times 1]} u \\ \uparrow [k \times 1] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A = [n \times n] \\ B = [n \times m] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C = [k \times n] \\ D = [k \times m] \end{array}$$

Contoh:

Suatu sistem mempunyai 2 masukan, 3 keluaran dan 5 peubah keadaan, akan dimodelkan dengan model Ruang Keadaan. Tentukan dimensi matrix A, B, C dan D!

Jawab:

$$m=2 \quad k=3 \quad n=5$$

$$A [5 \times 5], B [5 \times 2], C [3 \times 5], D [3 \times 2]$$

* Mengubah dari Model Ruang Keadaan ke Model Nisbah. Alih, MATLAB: `>>> ss2tf`

command

SISO
 $\hline$
 LTI

$m=k=1$

Linear Time Invariant

$\rightarrow \underbrace{A, B, C, D}_{\text{konstan (bukan } f(t))}$

Transf. Laplace

$$\int_0^{\infty} \dot{x} = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} = \int_0^{\infty} [A x(t) + B u(t)]$$

$$s \bar{X}(s) = A \bar{X}(s) + B U(s)$$

$$s \bar{X}(s) - \cancel{X(0)} = B U(s)$$

$$[sI - A] \bar{X}(s) = B U(s)$$

$$\bar{X}(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(n \times n)$

$$\underbrace{[sI - A]}_{[n \times n]} \underbrace{\dot{X}(s)}_{[n \times 1]} = \underbrace{B}_{[n \times 1]} \underbrace{U(s)}_{[1 \times 1]}$$

$$\underbrace{[sI - A]^{-1} [sI - A]}_I \dot{X}(s) = [sI - A]^{-1} B U(s)$$

$$\dot{X}(s) = [sI - A]^{-1} B U(s)$$

$$\mathcal{L} y(t) = \mathcal{L} x(t) + \mathcal{L} Du(t)$$

$$\underbrace{Y(s)}_{[1 \times 1]} = \underbrace{C}_{[1 \times n]} \underbrace{X(s)}_{[n \times 1]} + \underbrace{D}_{[1 \times 1]} \underbrace{U(s)}_{[1 \times 1]} = \underbrace{C}_{[1 \times n]} \underbrace{[sI - A]^{-1} B}_{n \times n} \underbrace{U(s)}_{[1 \times 1]} + \underbrace{D}_{[1 \times 1]} \underbrace{U(s)}_{[1 \times 1]}$$

$$Y(s) = \underbrace{[C [sI - A]^{-1} B + D]}_{[1 \times 1]} U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C [sI - A]^{-1} B + D} \quad [1 \times 1]$$

Contoh: * $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$ } model Ruang Kendaraan

$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$

Tentukan: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ } Model Nisbah Alih

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det[sI - A]} = \frac{\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s(s-1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s} //$$

$$* \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{array}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + [\emptyset] u \rightarrow y = x_1$$

$$G(s) = C [sI - A]^{-1} B + D \quad \checkmark$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \rightarrow [sI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]}$$

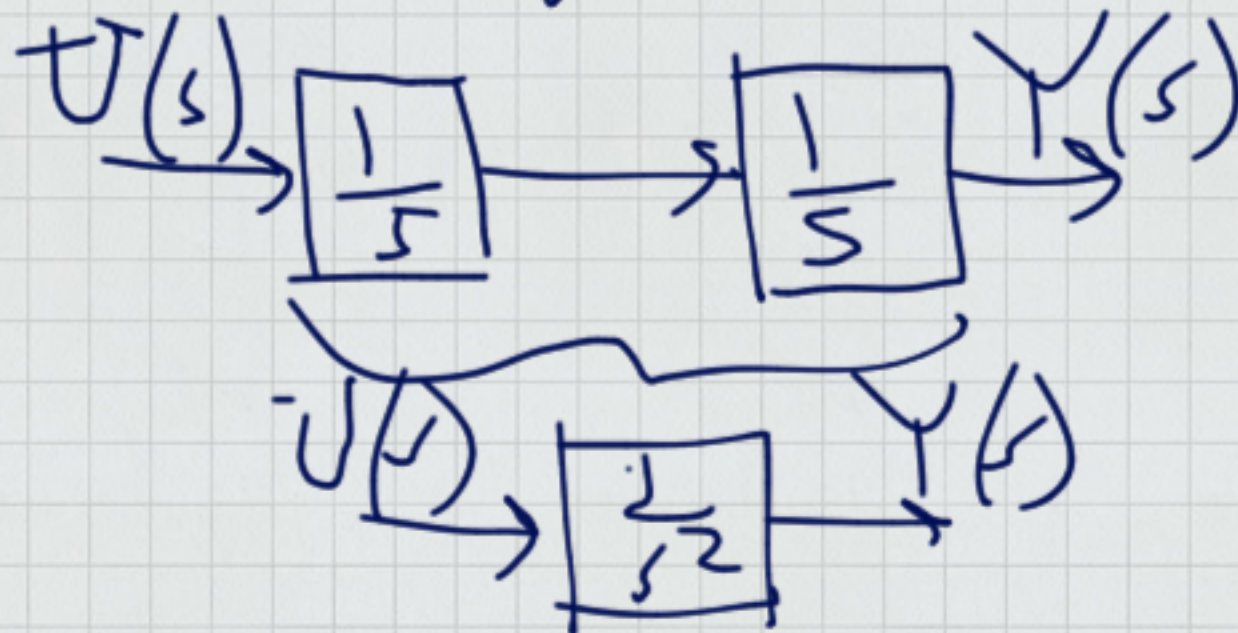
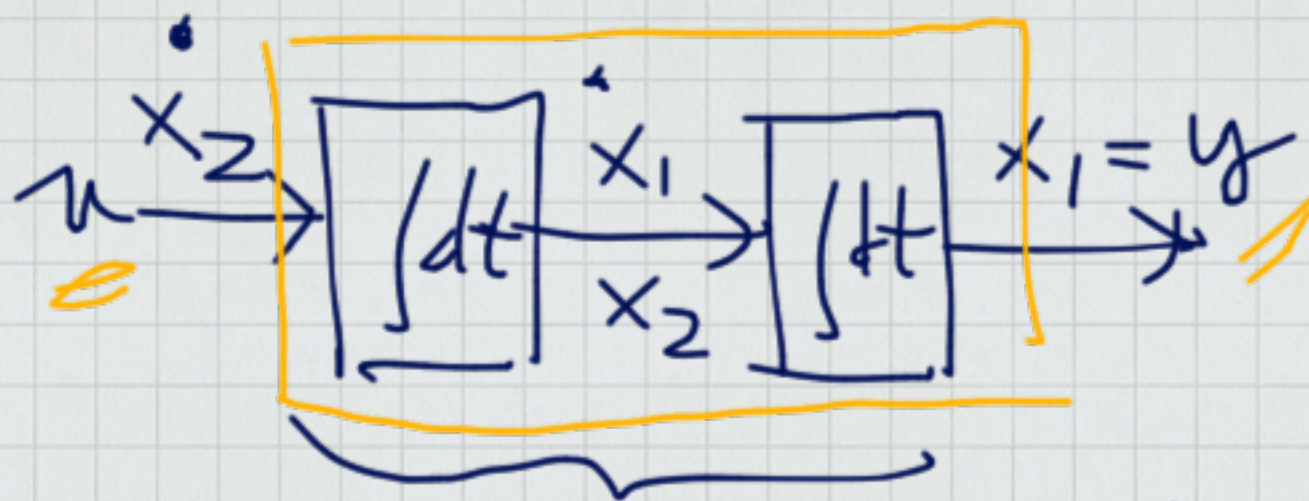
$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

check: $[sI - A][sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

OK!

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}$$

(double integrator)



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

* tfzss (transfer function to state space)

Catatan:

- * Dari suatu model nisbah Alih, dapat dibuat banjak sekali model ruang keadaan yang semuanya sah, tergantung pemilihan peubah-keadaan (state-assignment).
- * Hanya 2 (dua) kasus yang dikaji =
 - Kasus $m < n$
 - Kasus $m = n$dengan m dan n masing order polynomial pembilang dan penyebut dari $G(s)$.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$b_0, \dots, b_m, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, constant, LTI

* Kasus $m < n$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

dengan $m > n$ akan diubah menjadi model Ruang Keadaan

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

dengan matrix

A berbentuk
Companion Form

"Kawanan Jordan" (Jordan

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{2}{3}} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Jika } a=2 \\ \text{maka } b=3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Jika } a=4 \\ \text{maka } b=6 \end{array} \right]$$

peubah
is-7aror
↓

$$\left[\begin{array}{l} \text{Jika (I)} \\ \text{maka (II)} \end{array} \right] Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0] X(s)$$

$$U(s) = [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0] X(s)$$

Part (II):

$$U(s) = a_n s^n X(s) + a_{n-1} s^{n-1} X(s) + a_{n-2} s^{n-2} X(s) + \dots$$

Inverse Laplace Transform:

$$u = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x(t)}{dt^{n-2}} + \dots$$

$$\int_0^{t-1} X(s) = x(t) \quad \int_0^{t-1} U(s) = u$$

$$\mathcal{L}^{-1} X(s) = x(t) \quad \mathcal{L}^{-1} Y(s) = y$$

$$+ a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

Pemilihan Peubah Keadaan:

$$x_1 \triangleq x(t) \longrightarrow \dot{x}_1 = \frac{dx(t)}{dt} = x_2$$

$$x_2 \triangleq \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow \dot{x}_2 = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = x_3$$

$$x_3 \triangleq \frac{d^2x(t)}{dt^2} \longrightarrow \dot{x}_3 = \frac{d^3x(t)}{dt^3} = x_4$$

$$\vdots$$
$$x_{n-2} \triangleq \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \longrightarrow \dot{x}_{n-2} = \frac{d^n x(t)}{dt^n} = x_{n-1}$$

$$x_{n-1} \triangleq \frac{d^n x(t)}{dt^n} \longrightarrow \dot{x}_{n-1} = \frac{d^{n+1} x(t)}{dt^{n+1}} = x_n$$

$$x_n \triangleq \frac{d^{n+1} x(t)}{dt^{n+1}} \longrightarrow \dot{x}_n = \frac{d^{n+2} x(t)}{dt^{n+2}}$$

$$\dot{x}_n = \frac{d^{n+1} x(t)}{dt^{n+1}} = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \frac{a_2}{a_n} x_3 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u$$

Dalam operasi matriks $\dots$ (Pers. Keadaan) $\dots$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u$$

$A[n \times n]$
Jordan Companion
Matrix

Dari Pers I:

$$Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

Inverse Transf. Laplace:

$$y(t) = y = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

$m < n$

Pers. Keluaran:

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + \dots + b_{m-1} x_m + b_m x_{m+1}$$

Dalam bentuk matrix:

$$y = \underbrace{[b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \ 0 \ 0 \ 0]}_{\substack{\text{e } [1 \times n] \\ \leftarrow m+1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{n-(m+1)}} \quad \leftarrow m+1$$

Paling banyak
 $m = n-1$

Contoh:

* Susunlah model Ruang Keadaan dengan matrix A berbentuk Kawanan Jordan (Jordan Companion) dari model Nisbuh Alih.

$$G(s) = \frac{s^3 + 2}{10s^7 + 8s^5 + 6s^3 + 4s + 3}$$

Jawab:

$$m=3$$

$$n=7$$

→ Kasus $m < n \rightarrow D = [\emptyset]$

$$\begin{aligned} b_0 &= 2 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= 4 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 6 \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= 8 \\ a_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$(a_7 = 1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,3 & -0,4 & 0 & -0,6 & 0 & -0,8 & 0 \end{bmatrix}$$

$[7 \times 7]$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$[7 \times 1]$

$$C = [2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

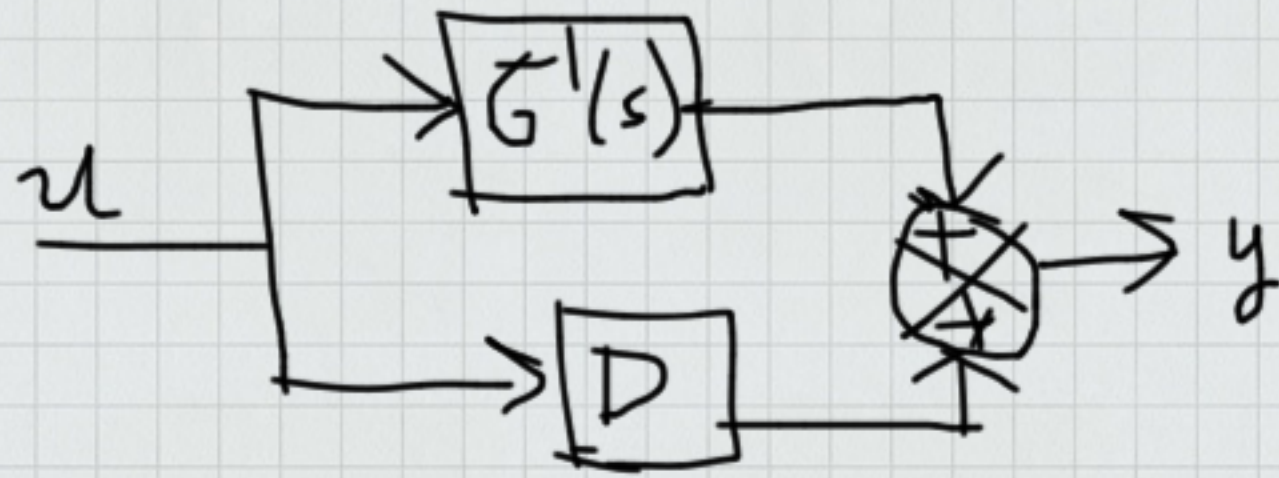
$$\begin{array}{c} 1 \times 7 \\ m+1 \\ b_0 \rightarrow b_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} n-(m+1) = 3 \\ \text{diisi dengan nol} \end{array}$$

$$* \quad G(s) = \frac{5s^7 + s^3 + 2}{10s^7 + 8s^5 + 6s^3 + 4s + 3} \quad \checkmark$$

$$m=7 \quad n=7 \rightarrow m=n$$

* Karena penyebut $G(s)$ sama dengan contoh sebelumnya, maka matrix A dan B untuk contoh kasus $m=n$ ini SAMA dgn sebelumnya.

* Untuk matrix $C [1 \times 7]$ ada b_0 s/d b_7 atau 8 koefisien yang harus diisikan ke matrix C



$$G(s) = G'(s) + D$$

Kasus $m < n$

Konsep: $\frac{5}{3} = \frac{2}{3} + 1$ $\frac{7}{2} = \frac{1}{2} + 3$

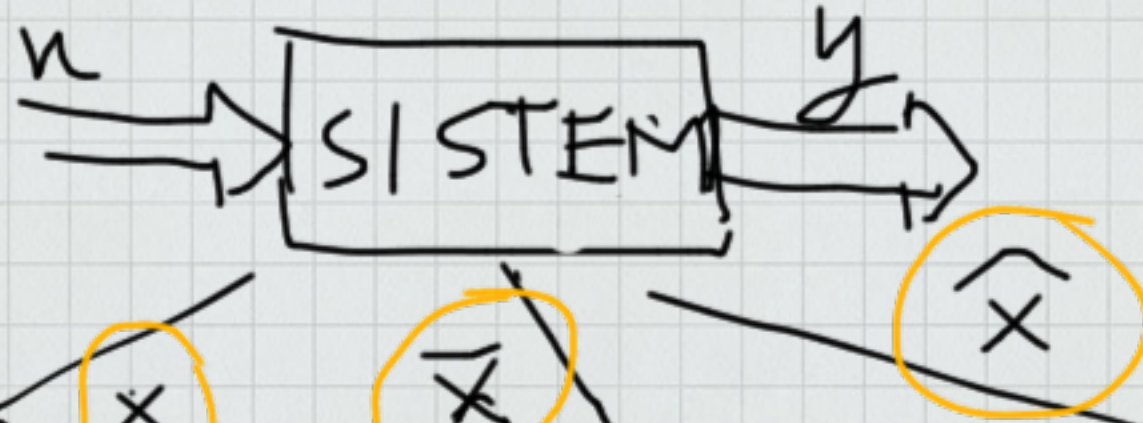
$$\begin{array}{r}
 10s^7 + 8s^5 + 6s^3 + 4s + 3 \quad \bigg/ \quad 5s^7 \\
 \underline{5s^7} \\
 5s^5 + 4s^5 \\
 \underline{5s^5} \\
 -4s^5 - 2s^3 - 2s + 0,5
 \end{array}$$

$$G'(s) = \frac{-4s^5 - 2s^3 - 2s + 0,5}{10s^7 + 8s^5 + 6s^3 + 4s + 3} \Rightarrow \text{Kasus } m < n$$

$$C = \begin{bmatrix} \overset{b_0}{0,5} & \overset{b_1}{-2} & \overset{b_2}{0} & \overset{b_3}{-2} & \overset{b_4}{0} & \overset{b_5}{-4} & \bigg| & 0 \end{bmatrix}$$

$m+1 = 6$

* TRANSFORMASI SIMILARITAS



Model ss:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

I

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

III

Transf. Similaritas

Transf. Similaritas dapat dilakukan dari Model I ke Model II ke Model III dan sebaliknya dengan memilih perubahan keadaan $\hat{x} = Tx$ dengan $T [n \times n]$ yang punya inverse T^{-1} , $TT^{-1} = I$.

$T = \underbrace{\text{invertible}}_{\text{(punya inverse)}} = \text{non-singular} \rightarrow \det(T) \neq 0$

T bisa dipilih sembarang $[n \times n]$, $\det(T) \neq 0$ berarti T^{-1} ada, sehingga $TT^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Transf. Similaritas}} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{bmatrix}$$

$\hat{x} = Tx$

$$\hat{x} = T x \rightarrow \dot{\hat{x}} = T \dot{x} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} u$$

kalikan T^{-1} :

kalikan T^{-1} :

$$A = T^{-1} \hat{A} T$$

$$T_A = TT - \hat{A}T$$

$$T_A = \hat{A}^T$$

$$TAT^{-1} = \hat{A}T$$

$$\Rightarrow \hat{A} = T \Delta T^{-1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} T^{-1}T\dot{x} &\equiv T^{-1}\hat{A}\hat{x} + T^{-1}\hat{B}u \\ I \quad \dot{x} &= T^{-1}\hat{A}\hat{x} + T^{-1}\hat{B}u \\ &= T^{-1}\hat{A}Tx + T^{-1}\hat{B}u \\ &= Ax + Bu \end{aligned} \right.$$

$$B = T^{-1} \hat{B}$$

$$TB = T T^{-1} \hat{B} \rightarrow \boxed{\hat{B} = T B}$$

$$y = \hat{C} \hat{x} + \hat{D} u = \hat{C} T x + \hat{D} u = C x + D u$$

$$C \xrightarrow{\hat{C}T} C T^{-1} \hat{C} T^{-1} \quad \boxed{\hat{D} = D}$$

$$\hat{C} = C T^{-1}$$

Contoh: Suatu sistem dimodelkan dengan model Ruang Keadaan. $\begin{bmatrix} \ddot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Lakukan Transf. Similaritas dengan

$$\hat{x} = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(T) = 1 \neq 0$$

check.

Jawab:
Hati Transf

$$T^{-1} = \frac{\text{adj}(T)}{\det(T)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = TB$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{OK!}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = D = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil Transformasi: $\hat{X} = Tx \rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{D} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$

Catatan:

* Karena sistem di atas adalah SISO, maka tentu bisa diubah menjadi model Nisbah Alih

$$\underline{G(s)} = \hat{C} [sI - \hat{A}]^{-1} \hat{B} + \hat{D} = C [sI - A]^{-1} B + \underline{\underline{D}}$$

(Tunjukkan!)

* Bisa ditunjukkan bahwa nilai-eigen matrix A sama dengan nilai-eigen matrix $\hat{A}$.

Jika nilai-eigen matrix $A : \lambda$, berlaku:

$$\det [\lambda I - A] = 0$$

dan $\det [\lambda I - \hat{A}] = 0$

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\det [\lambda I - A] = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 6 = 0$$

pers. karakter $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 8}}{2} = -$$

$$[\lambda I - \hat{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$\det [\lambda I - \hat{A}] = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 8 = 0$$

pers. karakter $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2}$

Kesimpulan:

Transf. Similaritas tidak mengubah nilai-eigen/pers. karakteristik dari matrix A

Khusus untuk SISO, nilai-eigen dari matrix A itu juga merupakan pole-pole dari $G(s)$, model Nisbah Alih-nya.



* Tanggapan dan Kestabilan ←

Pers. Keadaan : $\dot{x} = Ax + Bu$

→ pers. differensial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

diperoleh:

→ $x(t)$ = solusi pers. differensial
jika diketahui $x(0) = X_0$

Kasus

$u(t) = 0$ → solusi "khusus" $x(t)$

$u(t) \neq 0$ → solusi $x(t)$ → TANGGAPAN
atau RESPONSE thd $u(t)$

Skalar

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$
$$x(0) = X_0$$

a = skalar
 $x(t)$ = iparantungsh

Solusi $x(t)$ dapat diperoleh secara analitik dengan kalkulus:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \rightarrow \int \frac{dx(t)}{x(t)} = \int a dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int x^{-1} dx \\ &= \ln x \end{aligned}$$

$$\ln[x(t)] = at + C$$

$$\log[x(t)] = at + C$$

$$x(t) = e^{at+C} = e^C \cdot e^{at} = K e^{at}$$

Kondisi Awal

$$\begin{aligned} \log a &= {}^{10}\log a = b \\ a &= 10^b \end{aligned}$$

$$x(0) = X_0 \rightarrow x(0) = K e^0 = K = X_0$$

Solusi: $x(t) = X_0 e^{at}$

$$\text{Definisi: } e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

$$x=1 \rightarrow e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

$$x(t) = X_0 e^{at} = X_0 \left(1 + at + \frac{1}{2}a^2 t^2 + \frac{1}{6}a^3 t^3 + \frac{1}{24}a^4 t^4 + \dots \right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = X_0 \left(a + a^2 t + \frac{1}{2}a^3 t^2 + \frac{1}{6}a^4 t^3 + \dots \right)$$

$$= a X_0 \left(1 + at + \frac{1}{2}a^2 t^2 + \frac{1}{6}a^3 t^3 + \dots \right)$$

$$= \underbrace{a X_0 e^{at}}_{\text{kembali ke pers. dif}} = a x(t) \rightarrow \text{kembali ke pers. dif}$$

Jadi terbukti bahwa $x(t) = X_0 e^{at}$ adalah

SOLUSI dari pers. dif. $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$

Bgm kalau $x(t)$: vektor $n \times 1$
dan A : matriks $(n \times n)$

Pers. diff: $\frac{dx(t)}{dt} = A x(t)$, $x(0) = X_0$

Solusi: $x(t) = [e^{At}] X_0$

Definisi: $[e^{At}] = \left[I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{6} A^3 t^3 + \frac{1}{24} A^4 t^4 + \dots \right]$
[n x n]

sehingga $x(t) = \left[I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{6} A^3 t^3 + \frac{1}{24} A^4 t^4 + \dots \right] X_0$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[A + A^2 t + \frac{1}{2} A^3 t^2 + \frac{1}{6} A^4 t^3 + \dots \right] X_0$$

$$= A \left[I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{6} A^3 t^3 + \dots \right] X_0$$

$$= A [e^{At}] X_0 = A x(t) \quad \text{--- terbukti}$$

Dengan Transf. Similaritas, matrix A adalah "similar" dengan matrix $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $[n \times n]$ dengan $[\lambda_1 \dots \lambda_n]$ adalah nilai-eigen matrix A yang memenuhi pers.: $\det[\lambda I - A] = 0$

Pers. diff.: $\frac{dx(t)}{dt} = D x(t)$, $x(0) = X_0$
 mempunyai solusi: $x(t) = [e^{Dt}] X_0$

$$x(t) = \left[1 + Dt + \frac{1}{2} D^2 t^2 + \frac{1}{6} D^3 t^3 + \frac{1}{24} D^4 t^4 + \dots \right] X_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2} \lambda_1^2 t^2 + \frac{1}{6} \lambda_1^3 t^3 + \dots \\ 1 + \lambda_2 t + \frac{1}{2} \lambda_2^2 t^2 + \dots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} X_0$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} & 0 \end{bmatrix} x_0$$

$$\lambda = a + jb, \quad j = \sqrt{-1}$$

$$e^{\lambda t} = e^{at} \cdot e^{jbt} = e^{at} \underbrace{[\sin bt]}_{\text{periodik}}$$

Sistem STABIL jika $a < 0$

$e^{\lambda t} \rightarrow 0$

$a > 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = \infty$
 $a = 0 \rightarrow e^{at} = 1 \rightarrow \text{periodik}$
 $a < 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = e^{-\infty} = \underline{\underline{0}}$

Kesimpulan:

~~stabil~~ ~~tak stabil~~ ~~quasi~~

Suatu sistem yang dimodelkan dengan model Ruang Keadaan akan STABIL jika dan hanya jika SEMUA nilai-eigen matrix A berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks (bagian REAL-nya negatif).

STABIL = tanggapan tanpa masukan ($u=0$) menuju nol. ("keseimbangan")

Contoh: * $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$\det[\lambda I - A] = 0 \quad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(tidak berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks) $\rightarrow$ TIDAK STABIL

* $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad [\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$

$$\det[\lambda I - A] = \lambda(\lambda + 3) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

STABIL

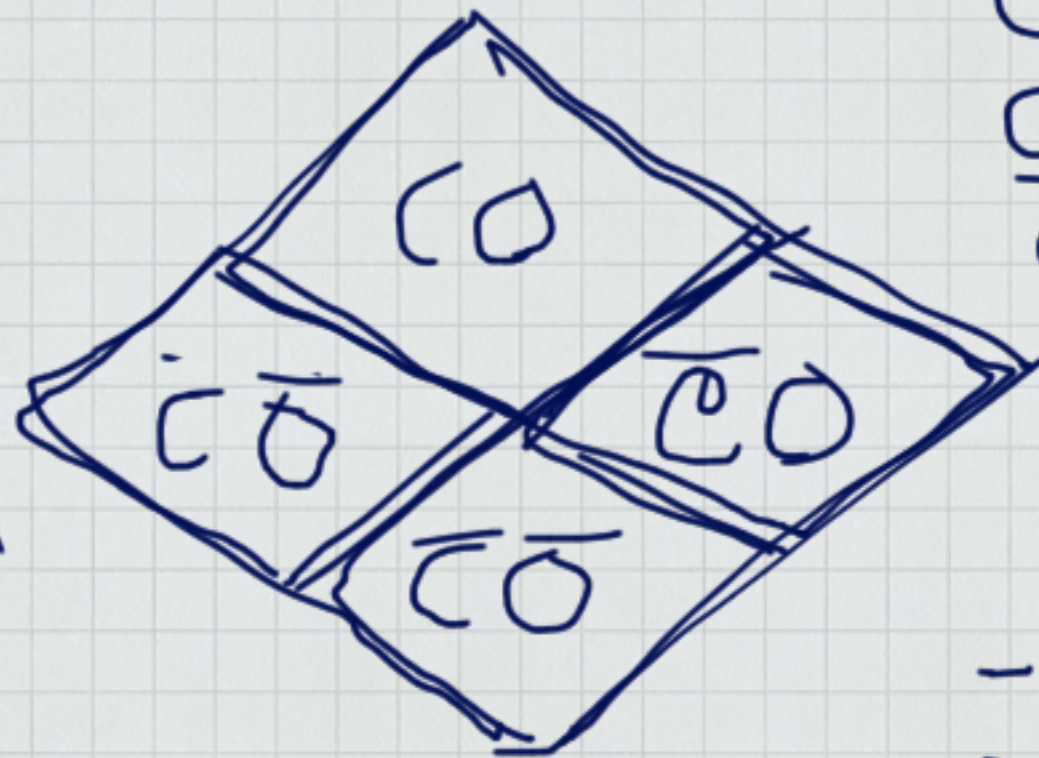
* KETERKENDALIAN dan KETERAMATAN

Controllability and observability

Kendali/PLANT:

Ilustrasi:

masuk



PLANT
(Kendali)

C = controllable
 $\bar{C}$ = uncontrollable
 O = observable
 $\bar{O}$ = unobservable

keluar
- stabilizable
- unstabilizable

Contoh: Kendalian:
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [7 \ 6 \ 4 \ 2]$$

$$D = [\emptyset]$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Transf. SIMILARITAS

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pers. Keadaan :

$$\hat{X} = T x$$

hasil Transf. SIMILARITAS

Pers. Keluaran :

$$\hat{x}_1 : C0$$

$$\hat{x}_2 : \bar{C}0$$

$$\hat{x}_3 : 00$$

$$\hat{x}_4 : 00$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + u$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -2\hat{x}_2$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -3\hat{x}_3 + u$$

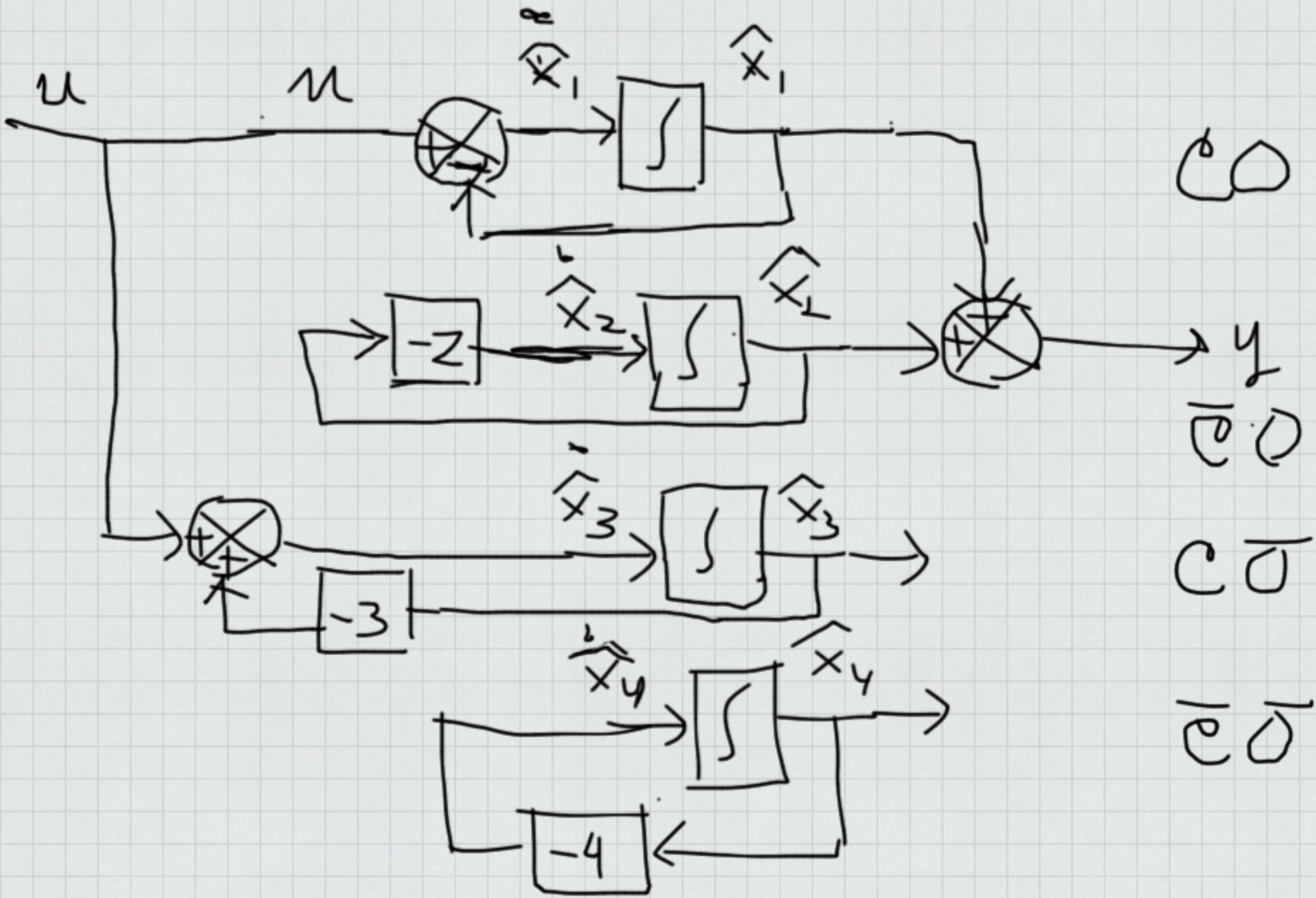
$$\dot{\hat{x}}_4 = -4\hat{x}_4$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + u \\ \dot{\hat{x}}_2 = -2\hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 = -3\hat{x}_3 + u \\ \dot{\hat{x}}_4 = -4\hat{x}_4 \end{array} \right\} [A], [B]$$

$$y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$$

$$[C], [D]$$

→ Bagan Kotak →
nilai-eigen A dan $\hat{A}$
 $\lambda = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Kendali an stabil



* UJI KETERKENDALIAN

Matrix keterkendalian
(Controllability Matrix)

$[P]$

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

$$A = [n \times n]$$

$$B = [n \times m]$$

$$[n \times (n * m)]$$

Kendalian SEPENUHNYA TERIKENDALI
(completely controllable) jika rank(P)
sama dengan n (full-rank)

[Khusus untuk $m=1$ (single input),
 $P [n \times n] \rightarrow$ full rank jika $\det(P) \neq 0$]

Untuk $m > 1 \rightarrow P$ full rank jika SEMUA matrix $[n \times n]$ dalam P det-nya $\neq 0$

$$[n \times (n \times m)] \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} | & | & | & \cdots & | \\ \hline \end{array} \right] \} n \text{ basis}$$

$[n \times m]$ Kolom

Contoh: $P: [B \ AB \ A^2 B \ A^3 B]$ (dengan)

$A [1 \times 4]$ $\hat{P}: [\hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \hat{A}^2\hat{B} \ \hat{A}^3\hat{B}]$ (MATLAB)

Ternyata $\text{rank}(P) = 2 < 4$

$\rightarrow$ tidak sepenuhnya terkendali

* USI KETERAMATAN

Q

Observability Test

Matrix Keteramatan

Q

$$Q = \begin{bmatrix} C^T & AC^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

Kendalian sepenuhnya teramati
(completely observable) jika Q full
rank $\rightarrow \text{rank}(Q) = n$. Jika $Q [n \times n]$
maka $\text{rank}(Q) = n$ jika $\det(Q) \neq 0$

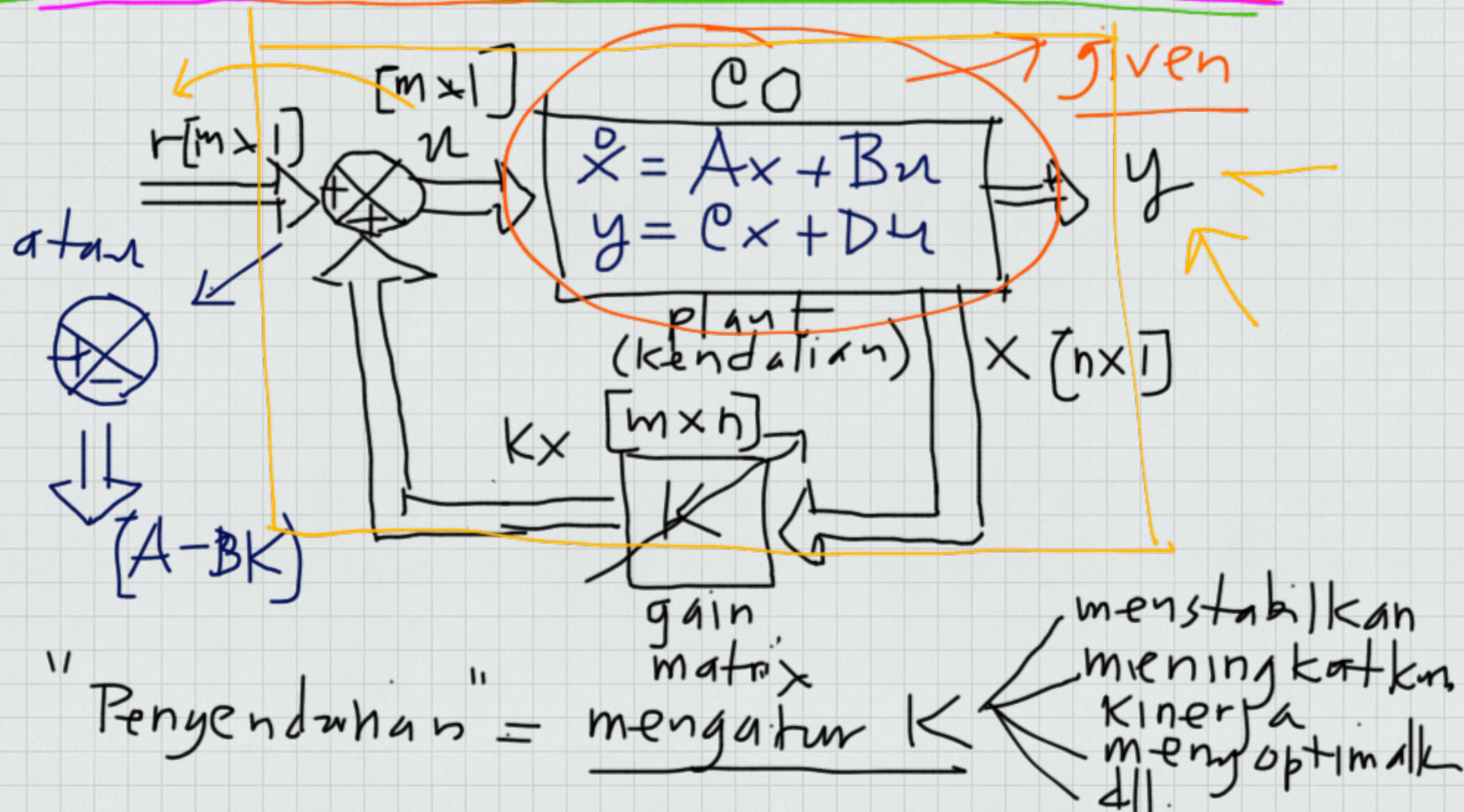
contoh: $Q = \begin{bmatrix} C^T & AC^T & (A^T)^2 C^T & (A^T)^3 C^T \end{bmatrix}$
 $\text{rank}(Q) = 2 < 4$ Tidak sepenuhnya
Terkendali

* Umpan Balik PEUBAH KEADAAAN

Suatu Kendalian yang sepenuhnya TERKENDALI dan TERAMATI dapat dikendalikan dgn UMPAHI BALIK PEUBAH KEADAAAN (state variable feedback)

→ Siap MID → 17/11/2017 ←

* Struktur Sistem Kendali dengan UMPAN BALIK PEUBAH KEADAAAN



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

dengan gain matrix K :

$$u = r + Kx$$

$$\left. \begin{array}{l} u [m \times 1], r [m \times 1] \\ Kx \Rightarrow [m \times 1] \\ x [n \times 1] \end{array} \right\}$$

$$K [m \times n]$$

Model Kendalian yang karakteristiknya ditentukan oleh nilai²-eigen matrix A, terutama nilai²-eigen yang paling "dekat" dengan sumbu khayal, disebut "dominant poles"

Contoh:

$$m = 2 \quad n = 3$$

maka $K [2 \times 3]$
ada 6 buah pengunt (amplifier)

$$u = r + Kx$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ &= Ax + B[r + Kx] \\ &= Ax + BKx + Br \\ &= \underbrace{[A + BK]}_{\bar{A}} x + Br\end{aligned}$$

$$\dot{x} = \bar{A}x + Br$$

miliki eigen matrix $\bar{A} = [A + BK]$
sepenuhnya bisa ditentukan
oleh K , sehingga

$$\det[\lambda I - \bar{A}] = 0$$

$$\begin{aligned}B &[n \times m] \\ BK &[n \times n]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= Cx + Du \\ &= Cx + D[r + Kx] \\ &= Cx + DKx + Dr \\ &= \underbrace{[C + DK]}_{\bar{C}} x + Dr\end{aligned}$$

Karakteristik
sistem Kendali
SEPENUHAHNYA
ditentukan
oleh
nilai K

MATLAB :
Command

>>> place → help place

$$[K] = \text{place}(A, B, \lambda)$$

↑

given

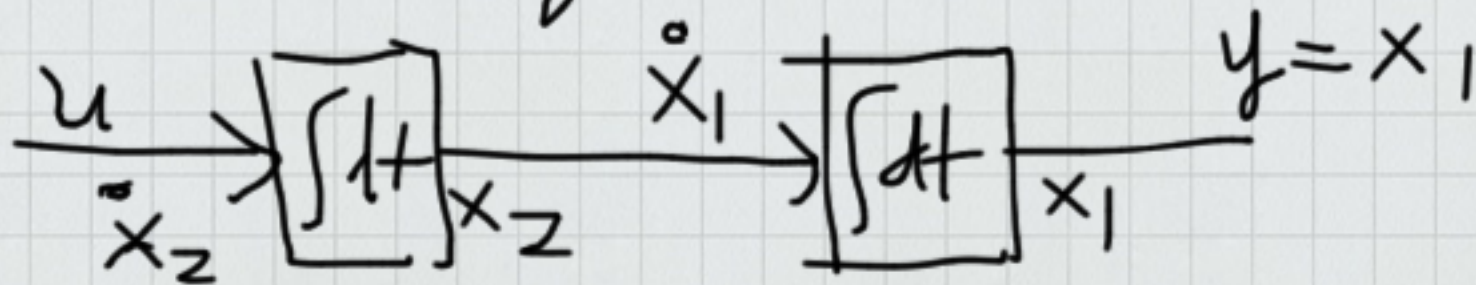
↑ λ yang diinginkan

$$>>> \text{eig}([A+BK])$$

Contoh :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

"Double Integrator" Plant



Model Ruang Keadaan:-

dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

- unstable

- CO

Sebelum pengendalian.

$$\det [\lambda I - A] = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = 0 \quad (\text{unstable})$$

Tunjukkan dengan matrix P dan Q
kendalian ini $\Rightarrow$ stabilizable

Tentukan gain matrix K sehingga nilai-eigen matrix $\bar{A} = A + BK$ berada di sebelah kiri sumbu khayal: $a \pm jb, \sigma < 0$

$$\bar{A} = [A + BK] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2]$$

$$\begin{matrix} A \begin{bmatrix} 2 \times 2 \end{bmatrix} \\ B \begin{bmatrix} 2 \times 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} K \begin{bmatrix} 1 \times 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det [\lambda I - \bar{A}] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -k_1 & \lambda - k_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - k_2) - k_1 = 0$$

$$\lambda^2 - k_2\lambda - k_1 = 0$$

$$-k_2 = -2a$$

$$k_2 = 2a < 0$$

$$-k_1 = a^2 + b^2$$

$$k_1 = -(a^2 + b^2) < 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda_1 = a + jb \quad a < 0$$

$$\lambda_2 = a - jb$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2) = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} 2a & -(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

dapat ditentukan
 dengan menempatkan λ
 di mana saja dalam bidang Komplek

* Jadwal Ujian FINAL dan PRAKTIKUM

15 DESEMBER 2017

Jum'at, jam 09:00 - 10:40

⇒ Open book, No-gadget, No LAPTOP

⇒ Dikumpul setelah digunakan ujian

Laporan: * Praktikum INDIVIDU

* Praktikum KELOMPOK

⇒ 2 kelompok: Kel. A dan Kel. B

⇒ Praktikum INDIVIDU

untuk memanfaatkan fasilitas MATLAB

* Mengerjakan ulang soal MID

* tf2ss dan "place" (umpan balik
peubah keadaan)

Note: Praktikum ini dikerjakan dengan bantuan program MATLAB secara individual (sendiri-sendiri). Praktikum secara berkelompok, Insya Allah akan diumumkan pekan depan di LSKI, termasuk pembagian kelompoknya.

1. Kerjakan ulang semua soal TEST I dengan bantuan program MATLAB. (20 point)
2. Dengan fasilitas SIMULINK pada MATLAB, buatlah simulasi untuk mengetahui **tanggapan undak** (*step-response*) dari (masing-masing 10 point):
 - a. Kendalian (*plant*) pada soal no. 2 (a) pada soal TEST I
 - b. Kendalian hasil transformasi similaritas pada soal no. 2 (d) TEST I
 - c. Sistem kendali dengan umpan-balik keadaan untuk kendalian hasil transformasi dari soal 2 (g) TEST I
 - d. Diskusikan pengaruh letak nilai-nilai-eigen matrix A (atau A atau $[A + BK]$) pada tanggapan undak dari suatu kendalian atau sistem kendali
3. Suatu kendalian dimodelkan dengan model Nisbah Alih:

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{4s^7 + s^6 + s^5 + As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E}$$

di mana: D411-AB-CDE adalah No. STB anda sendiri, tentu saja !

- a. Tentukan secara manual tanpa menggunakan MATLAB (seperti yang dicontohkan di kelas) Model Ruang Keadaan dari kendalian ini yang matrix A-nya berbentuk *Jordan Companion Matrix*! (10 point).
- b. Tentukan (boleh menggunakan MATLAB) nilai-nilai eigen matrix A. Stablikah kendalian ini? Tanya kenneee.....apa? (10 point).
- c. Rancanglah suatu pengendali dengan umpan-balik peubah keadaan yaitu dengan menentukan *gain-matrix* $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_5 \ K_6 \ K_7]$ sehingga nilai-nilai eigen matrix $[A + BK]$ -nya semuanya berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks dengan perincian sebagai berikut (10 point):
 - sepasang nilai-eigen berupa pasangan *complex-conjugate* yang letaknya cukup **dekat** dengan sumbu khayal
 - sepasang nilai-eigen berupa pasangan *complex-conjugate* yang letaknya cukup **jauh** dengan sumbu khayal
 - tiga buah nilai-eigen berupa bilangan nyata (*real*) negatif yang letaknya cukup jauh di sebelah kiri sumbu khayal dibandingkan pasangan-pasangan nilai-eigen *complex conjugate* di atas
- d. Dengan menggunakan SIMULINK, simulasikanlah untuk mendapatkan tanggapan undak (*step response*) dari kendalian tanpa pengendali dan tanggapan undak dari sistem kendali menggunakan pengendali umpan-balik peubah keadaan, sehingga bisa dibandingkan antara keduanya. (10 point).

“Sistem Kendali”

“Tugas Final”



Oleh:

SAHRUM NURHABIB YUSUF D411 12 267

SUB PRODI TEKNIK KOMPUTER KENDALI ELEKTRONIKA

PRODI S1 TEKNIK ELEKTRO

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2014/2015

1. Kerjakan ulang semua soal MIDTEST dengan bantuan program MATLAB.(20 point):

- Soal no. 1.(a) dan 1.(b) menggunakan perintah *tf2ss*
- Soal 2.(b) menggunakan perintah *ss2tf*
- Soal 2.(c) dan 2.(e) menggunakan perintah *eig*
- Soal 2.(d) menggunakan berbagai operasi matrix yang tersedia di MATLAB
- Soal 2.(f) menggunakan perintah *place*, jika mendapatkan “error”, cari solusinya dengan kata kunci: “*eigenvalue multiplicity pole placement*” di Google

Soal Mid!!

1. Ubahlah Model Nisbah Alih (Transfer Function) di bawah ini menjadi Model Ruang

$$(a) G(s) = \frac{3s+2}{(5s+2)(4s+1)^2}$$

a=[80 82 25 2];

b=[3 2];

[A,B,C,D]=tf2ss(b,a)

A =	-1.0250	-0.3125	-0.0250
	1.0000	0	0
	0	1.0000	0

B =	1
	0
	0

C =	0	0.0375	0.0250
-----	---	--------	--------

D =	0
-----	---

$$(b) G(s) = G(s) = \frac{(3s+2)^3}{(5s+2)(4s+1)^2}$$

a=[80 82 25 2];

b=[27 44 36 8];

[A,B,C,D]=tf2ss(b,a)

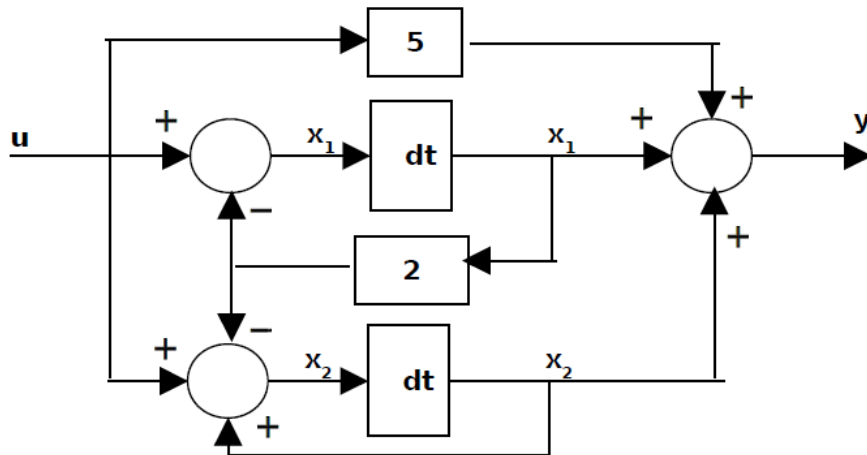
A =	-1.0250	-0.3125	-0.0250
	1.0000	0	0
	0	1.0000	0

B =	1
	0
	0

C =	0.2041	0.3445	0.0916
-----	--------	--------	--------

D =	0.3375
-----	--------

2. Suatu kendalian (plant) dimodelkan dengan bagan kotak sebagai berikut:



(a) (15 point) Tentukan Model Ruang Keadaan dari kendalian tersebut di atas!

$a = [-2 \ 0; -2 \ 1];$

$b = [1; 1];$

$c = [1 \ 1];$

$d = [5];$

(b) (10 point) Dari Model Ruang Keadaan di atas, tentukan Model Nisbah Alih-nya

$[x,y] = ss2tf(a,b,c,d)$

$x = \quad 5.0000 \quad 7.0000 \quad -11.0000$

$y = \quad 1 \quad 1 \quad -2$

(c) (10 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix A, apakah kendalian ini stabil?

$eigena = eig(a)$

$eigena =$

1

-2

(Tidak stabil)

(d) (10 point) Lakukan transformasi similaritas pada model di atas dengan matrix:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$t = [1 \ 0; 1 \ 2];$

$ta = t*a*inv(t)$

$ta = \quad -2 \quad 0$

$\quad -7 \quad 1$

$tb = t*b$

$tb = \quad 1$

$\quad 3$

$tc = c*inv(t)$

$tc = \quad 0.5000 \quad 0.5000$

td=d
td = 5

(e) (5 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $A = TAT^{-1}$ hasil transformasi !

eigenta=eig(ta)
eigenta =
1
-2

(f) Jika kendalian hasil transformasi di atas akan dikendalikan dengan umpanbalik peubah keadaan (state-variable feedback), maka:

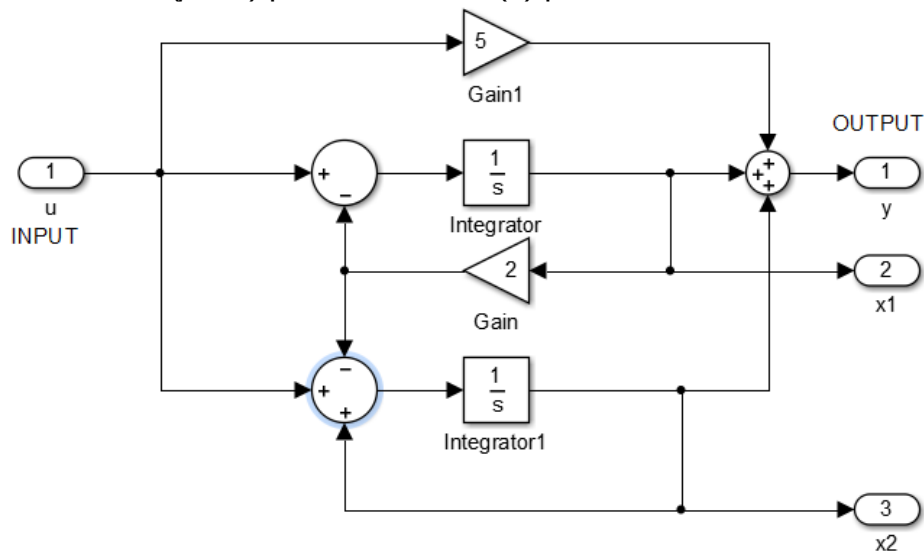
- o Gambarkan bagan-kotak kendalian hasil transformasi dengan dua integrator seperti (tapi tentu tidak sama dengan) aslinya di atas. (10 point)
- o Tambahkan pada gambar bagan-kotak kendalian hasil transformasi di atas pengendali umpan-balik peubah keadaan (state-variable feedback) dengan gain-matrix $K = [K_1 \ K_2]$! (10 point)
- o Tentukanlah K_1 dan K_2 agar nilai-nilai eigen matrix $[A - BK]$ menjadi nilai eigen kembar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (10 point)

$K = \text{place}(ta, tb, [-1 \ 0])$

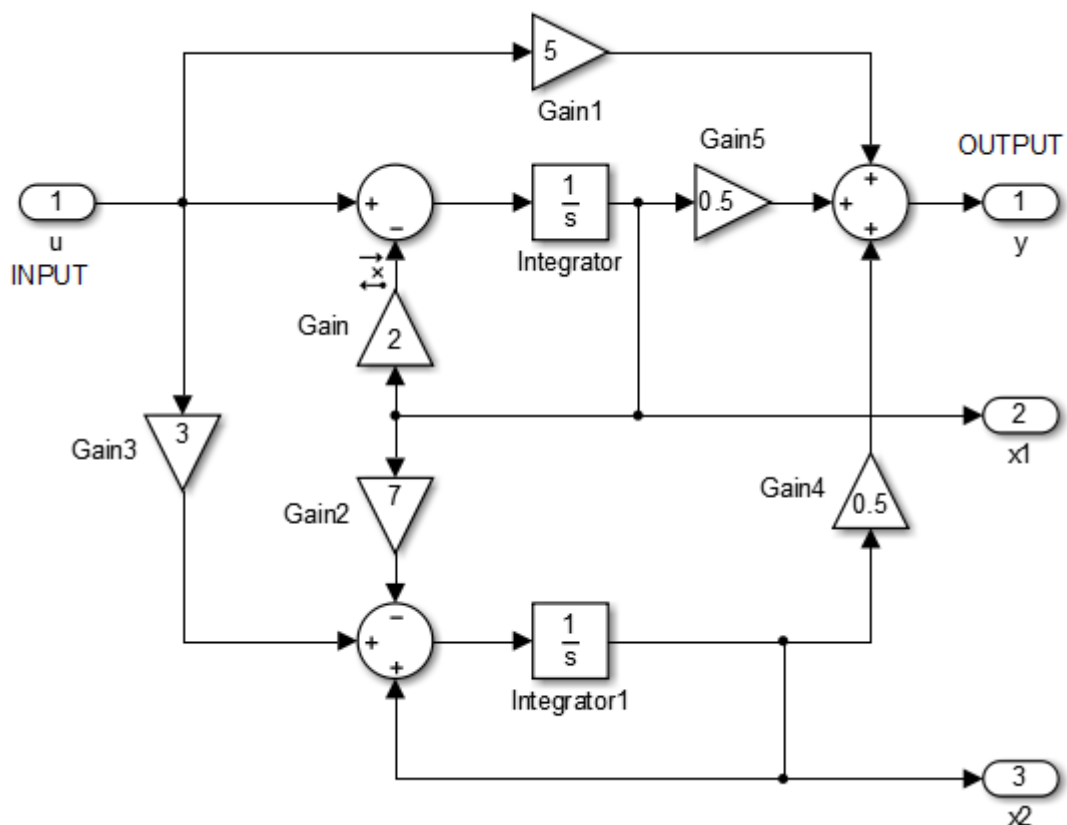
$K = \quad -3.0000 \quad 1.0000$

2. Dengan fasilitas SIMULINK pada MATLAB, buatlah simulasi untuk mengetahui **tanggapan undak** (*step-response*) dari (masing-masing 10 point):

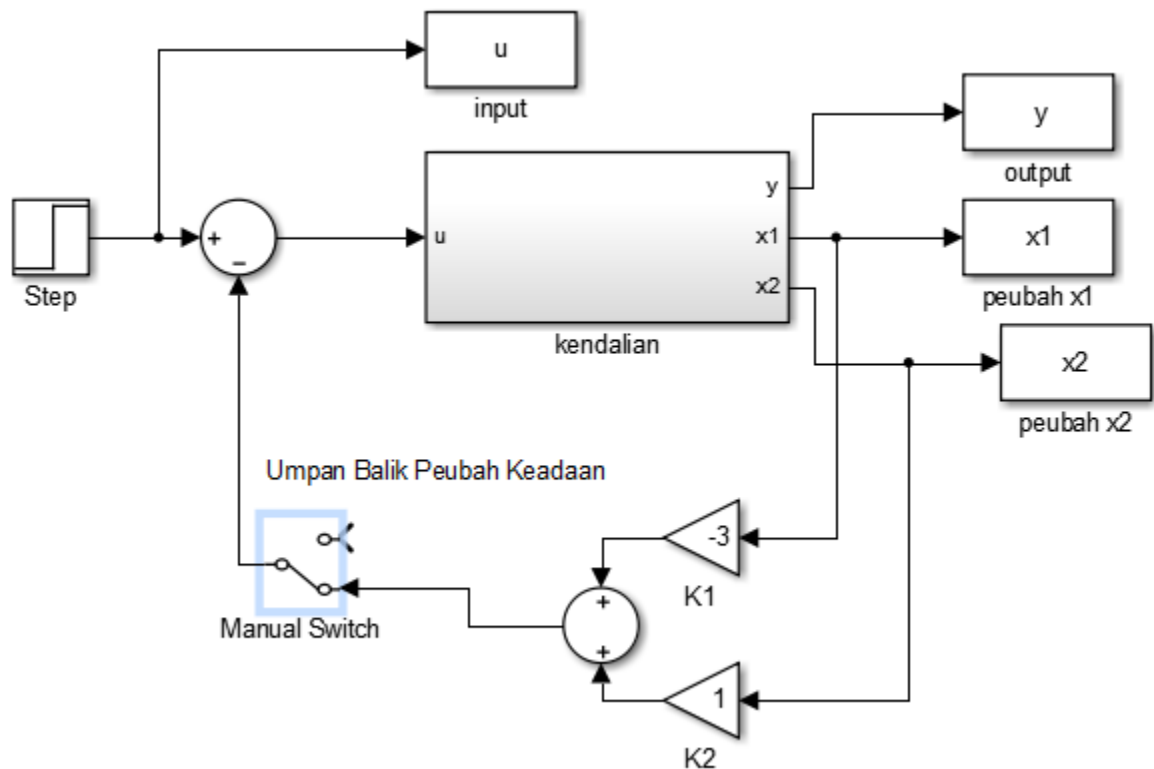
a. Kendalian (*plant*) pada soal no. 2 (a) pada soal MIDTEST I



b. Kendalian hasil transformasi similaritas pada soal no. 2 (d) MIDTEST I



c. Sistem kendali dengan umpan-balik keadaan untuk kendalian hasil transformasi dari soal 2 (f) MIDTEST I



- d. Diskusikan pengaruh letak nilai-nilai-eigen matrix **A** (atau **A** atau **[A - BK]**) pada tanggapan undak dari suatu kendalian atau sistem kendali. Pengaruh nilai eigen dari matriks **A** akan menentukan letak pole dari system kendali. Apabila pole berada pada sisi real, menunjukkan bahwa system tidak stabil. Sedangkan apabila pole berada pada sisi imajiner, berarti menunjukkan system kendali yang stabil.

3. Suatu kendalian dimodelkan dengan model Nisbah Alih:

$$G(s) = \frac{10s^2 + 1}{4s^7 + s^6 + s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 6s + 7}$$

a. Tentukan secara manual tanpa menggunakan MATLAB (seperti yang dicontohkan di

kelas) Model Ruang Keadaan dari kendalian ini yang matrix **A**-nya berbentuk *Jordan Companion Matrix*! (10 point).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 2/7 & 2/7 & 6/7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4/7 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 1] \quad D = [0]$$

b. Tentukan (boleh menggunakan MATLAB) nilai-nilai eigen matrix **A**. Stabilkan kendalian ini? Tanya kenneee.....apa? (10 point).

>> eigena=eig(a)

eigena =

```
1.3993 + 0.0000i
0.6193 + 0.6367i
0.6193 - 0.6367i
-0.1524 + 0.8498i
-0.1524 - 0.8498i
-0.7380 + 0.3870i
-0.7380 - 0.3870i
```

c. Rancanglah suatu pengendali dengan umpan-balik peubah keadaan yaitu dengan menentukan *gain-matrix* **K** = [**K**₁ **K**₂ **K**₃ **K**₄ **K**₅ **K**₆ **K**₇] menggunakan perintah *place* pada MATLAB sehingga nilai-nilai eigen matrix [**A** - **BK**]-nya semuanya berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks dengan perincian sebagai berikut (10 point):

- sepasang nilai-eigen berupa pasangan *complex-conjugate* yang letaknya cukup **dekat** dengan sumbu khayal $\lambda_{1,2} = -p + jr$, **p** cukup kecil.
- sepasang nilai-eigen berupa pasangan *complex-conjugate* yang letaknya cukup **jauh** dengan sumbu khayal $\lambda_{3,4} = -s + jt$, **s** cukup besar.
- tiga buah nilai-eigen kembar berupa bilangan nyata (*real*) negatif yang letaknya cukup jauh di sebelah kiri sumbu khayal ($\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 \lll 0$) dibandingkan pasangan-pasangan nilai-eigen *complex conjugate* di atas

K=place(a,b,[-0.1+1*i -0.1-1*i -10+1*i -10-1*i -30+i*eps*1e14 -30-i*eps*1e14 -30-eps*1e14])

K =

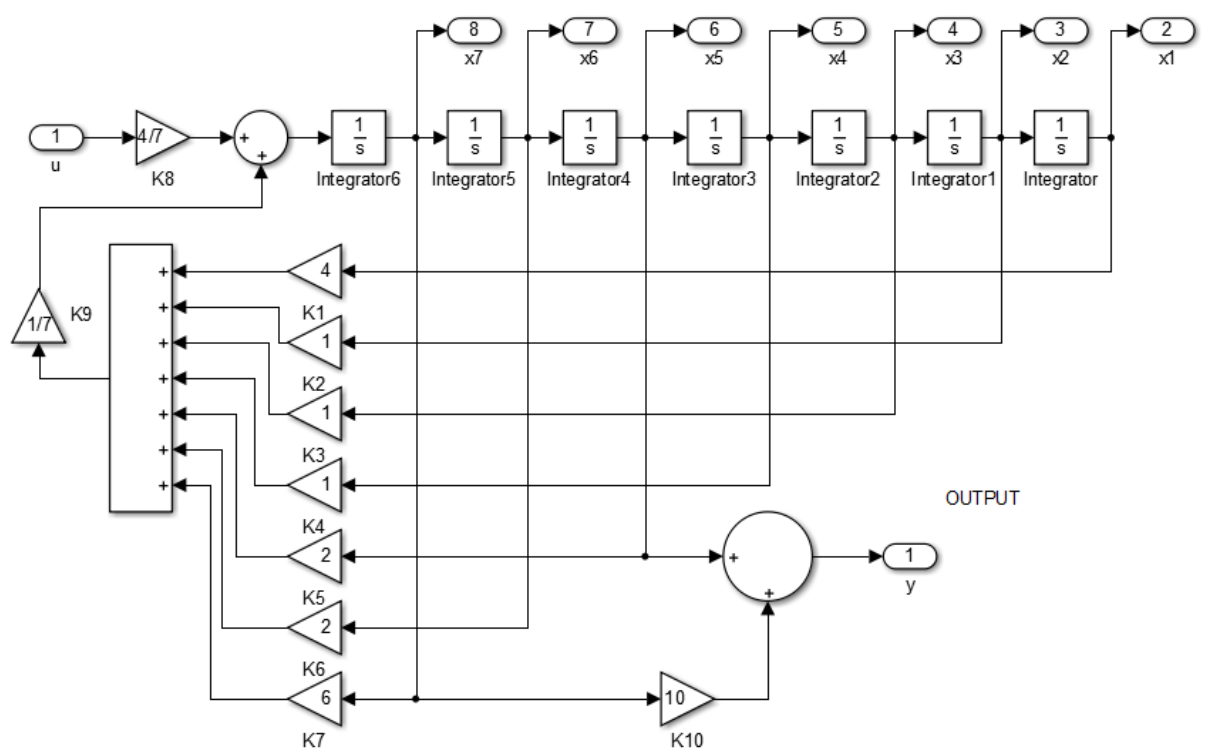
1.0e+06 *

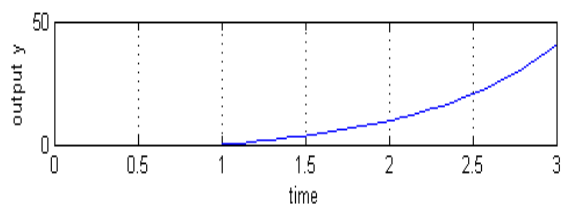
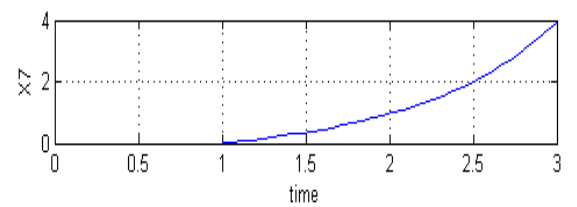
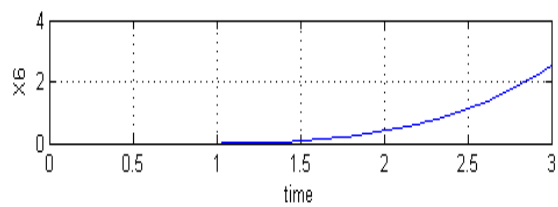
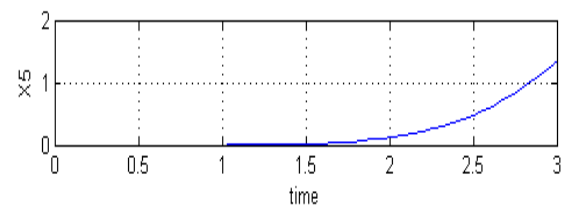
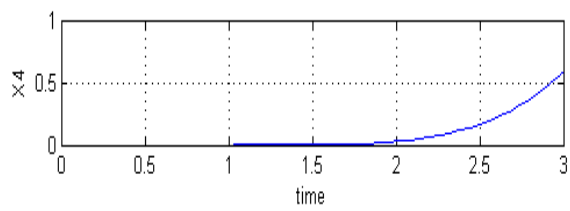
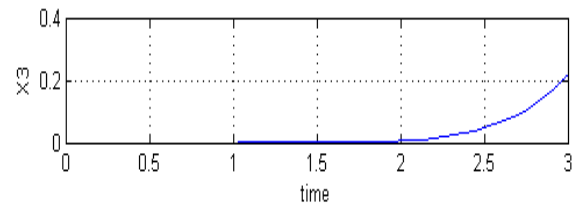
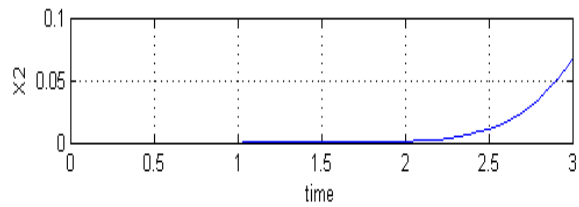
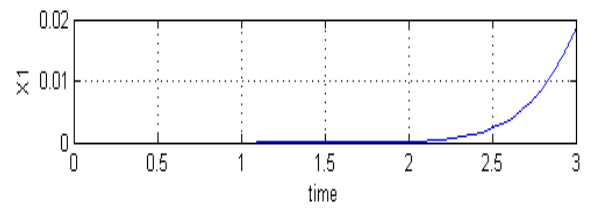
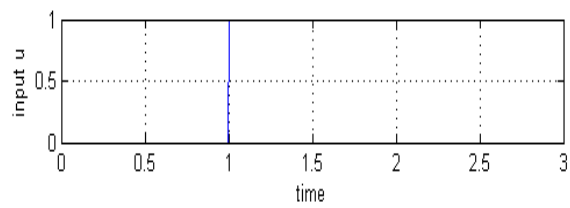
4.8235 2.3925 5.2197 1.4628 0.1595 0.0081 0.0002

d. Dengan menggunakan SIMULINK, simulasikanlah untuk mendapatkan tanggapan undak (*step response*) dari kendalian tanpa pengendali dan tanggapan undak dari sistem kendali menggunakan pengendali umpan-balik peubah keadaan, sehingga bisa

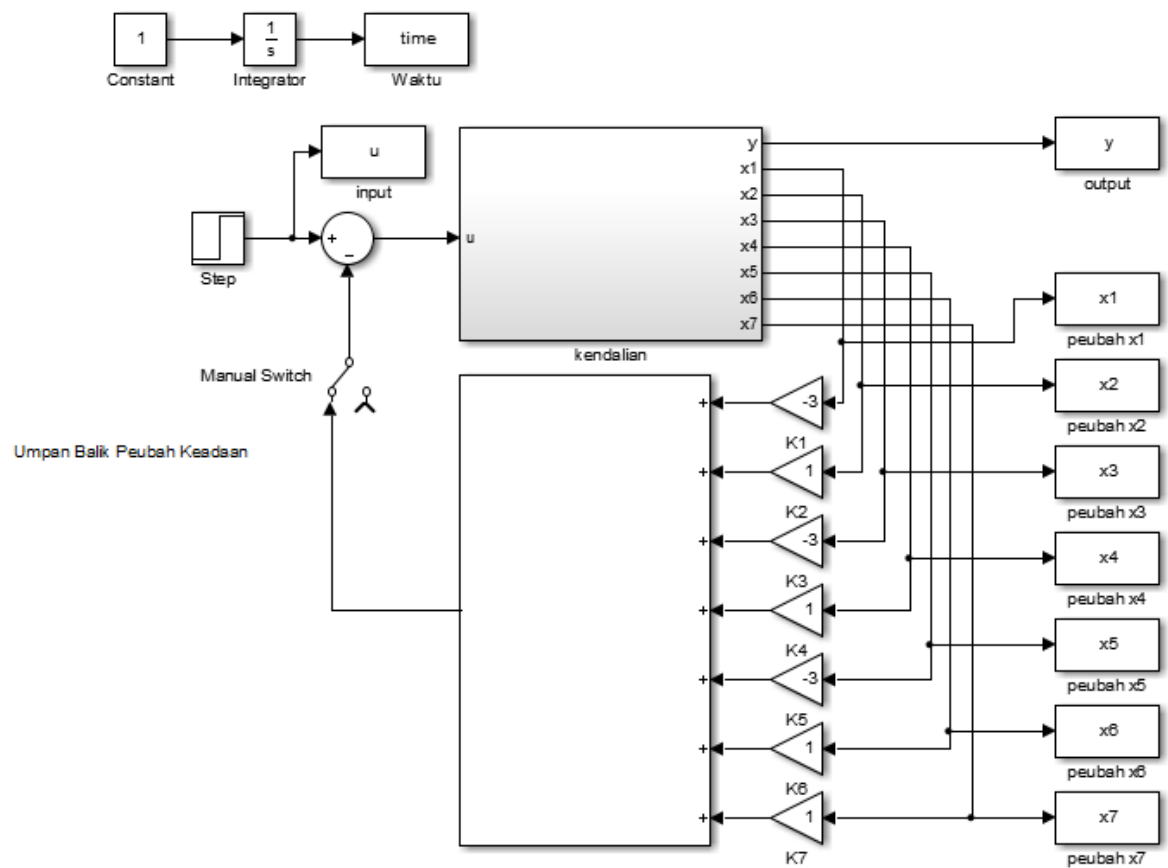
dibandingkan antara keduanya. (10 point).

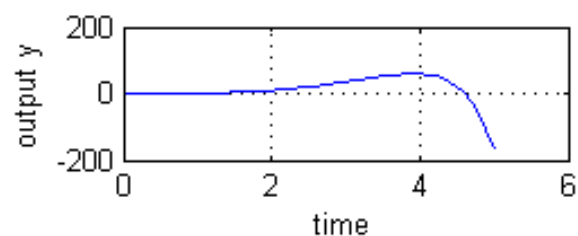
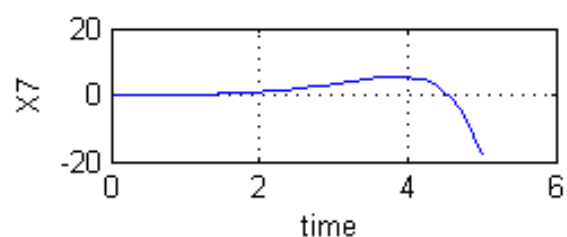
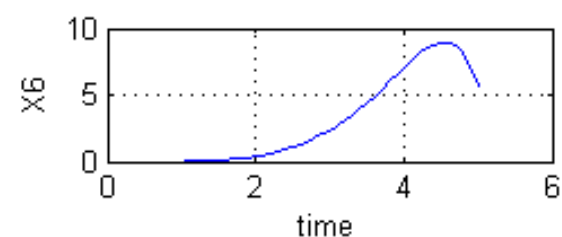
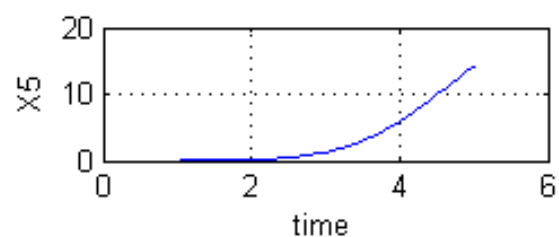
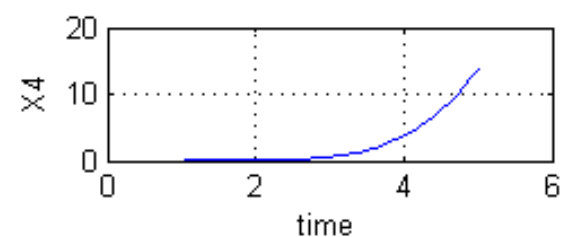
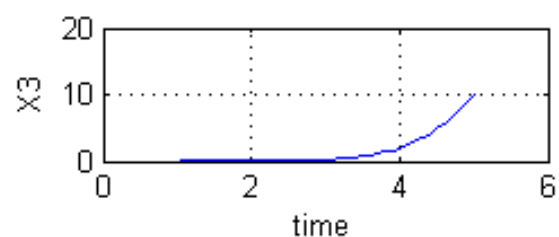
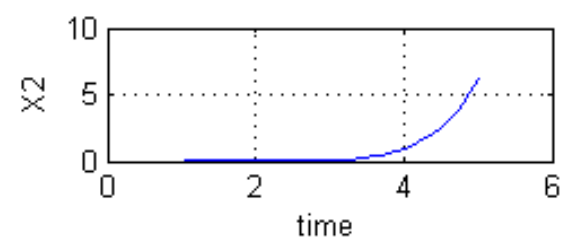
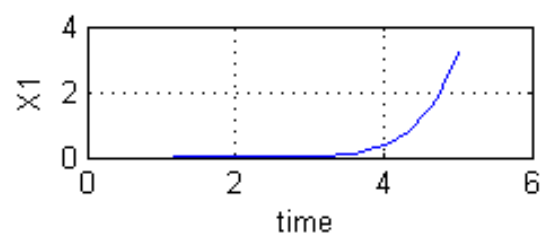
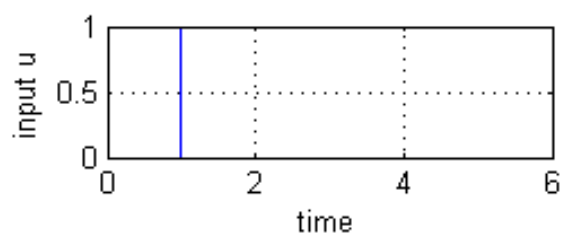
Simulink tanpa pengendali





Simulink dengan pengendali umpan balik





Note: Praktikum ini dikerjakan dengan bantuan program MATLAB secara individual (sendiri-sendiri). Praktikum secara berkelompok, Insya Allah akan diumumkan pekan depan di LSKI, termasuk pembagian kelompoknya.

1. Kerjakan ulang semua soal TEST I dengan bantuan program MATLAB. (20 point)
2. Dengan fasilitas SIMULINK pada MATLAB, buatlah simulasi untuk mengetahui **tanggapan undak** (*step-response*) dari (masing-masing 10 point):
 - a. Kendalian (*plant*) pada soal no. 2 (a) pada soal TEST I
 - b. Kendalian hasil transformasi similaritas pada soal no. 2 (d) TEST I
 - c. Sistem kendali dengan umpan-balik keadaan untuk kendalian hasil transformasi dari soal 2 (g) TEST I
 - d. Diskusikan pengaruh letak nilai-nilai-eigen matrix A (atau A atau $[A + BK]$) pada tanggapan undak dari suatu kendalian atau sistem kendali

3. Suatu kendalian dimodelkan dengan model Nisbah Alih:

$$G(s) = \frac{10s^2 + 1}{4s^7 + s^6 + s^5 + As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E}$$

di mana: D411-AB-CDE adalah No. STB anda sendiri, tentu saja !

- a. Tentukan secara manual tanpa menggunakan MATLAB (seperti yang dicontohkan di kelas) Model Ruang Keadaan dari kendalian ini yang matrix A-nya berbentuk *Jordan Companion Matrix*! (10 point).
- b. Tentukan (boleh menggunakan MATLAB) nilai-nilai eigen matrix A. Stabillkan kendalian ini? Tanya kenennn.....apa? (10 point).
- c. Rancanglah suatu pengendali dengan umpan-balik peubah keadaan yaitu dengan menentukan *gain-matrix* $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_5 \ K_6 \ K_7]$ sehingga nilai-nilai eigen matrix $[A + BK]$ -nya semuanya berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks dengan perincian sebagai berikut (10 point):
 - sepasang nilai-eigen berupa pasangan *complex-conjugate* yang letaknya cukup **dekat** dengan sumbu khayal
 - sepasang nilai-eigen berupa pasangan *complex-conjugate* yang letaknya cukup **jauh** dengan sumbu khayal
 - tiga buah nilai-eigen berupa bilangan nyata (*real*) negatif yang letaknya cukup jauh di sebelah kiri sumbu khayal dibandingkan pasangan-pasangan nilai-eigen *complex conjugate* di atas
- d. Dengan menggunakan SIMULINK, simulasikanlah untuk mendapatkan tanggapan undak (*step response*) dari kendalian tanpa pengendali dan tanggapan undak dari sistem kendali menggunakan pengendali umpan-balik peubah keadaan, sehingga bisa dibandingkan antara keduanya. (10 point).



PEMBAGIAN KELOMPOK

KELOMPOK I		
No.	STB	N a m a
1	11261	Muh. Habibuddin (KETUA)
2	11311	I c h s a n
3	11118	Muhammad Zaid B.
4	11267	Reza Renaldy
5	11251	Abdul Malik Mahmud
6	11317	Muhammad Rinaldi
7	11304	Nushhan Adly

KELOMPOK II		
No.	STB	N a m a
1	11295	M u a n z i r (KETUA)
2	11314	Herry Sulfian
3	11280	Juliana Wijayanti
4	11309	Miftahul Khaer
5	11107	Andi Dahsyat Armanda
6	11294	Firmansyah
7	11102	Muhammad Yakub

KELOMPOK III		
No.	STB	N a m a
1	10260	Fara Triadi (KETUA)
2	10012	Amiruddin
3	08305	Abd. Wahid Alkindy
4	10114	M. Yusuf Said
5	10264	Zaldy Yunus
6	10299	Suardi M.
7	10278	Arismunandar Al-Ayubi
8	10273	Arif Kurniawan

KELOMPOK IV		
No.	STB	N a m a
1	07022	Nur Aisyah A. (KETUA)
2	10116	Muh. Anugerah
3	10015	Muh. Fadly B..
4	10310	Hasrul Rustam
5	10311	I v e n
6	10293	Mustafa Kemal Sahdi
7	08339	Haqriarno
8	10303	Denny Pratama P.S.

Tugas dari Praktikum kelompok ini adalah membangun **Model Ruang Keadaan** dari **Sistem Kendali Servo Kecepatan** dan **Servo Posisi** menggunakan Motor DC Terkendali Jangkar yang tersedia di **LSKI**. Pertemuan untuk koordinasi akan diselenggarakan pada jam kuliah (setiap **Kamis, jam 0915** sampai selesai di ruang **PBT 303**, dilanjutkan di **LSKI**).

Demikian agar maklum, yahTerimakasih.

Dosen ybs,

Rhiza S. Sadjad

* MOTOR DC (terkendali jangkar)

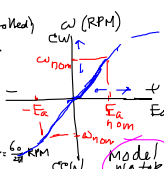
Block diagram of a DC motor system:

- Inputs: $P_A(s)$ and E_A (with $[V]$ and $+/-$ signs).
- Block: MOTOR DC.
- Outputs: $\omega(t)$ and ω (with $[rad/sec]$ and $[RPM]$ units).

Handwritten notes and calculations:

- $\omega = K \frac{E_a}{E_{a nom}}$
- $K = \frac{\omega_{nom}}{E_{a nom}}$
- $1 \text{ RPM} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ sec}} \rightarrow 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
- Red text: cw/ccw

Model Fisik


$$K = \frac{4000 \text{ RPM}}{12 \text{ Volts}}$$

$$K = \frac{2\pi}{60} \times 4000$$

$$K = \frac{12}{12}$$

rad
Volts WRAP UP

- * Model Ruang Kendaraan
- * ss2tf siso
- * tf2ss
- * Solusi: $\hat{x} = Ax + Bu$
- * Transf. SIMILARITAS
- * Kontrolabilitas (nilai-eigen A)
- * Keterkendalaan & Kontrolatan
- * Umpan Balik Rebal Kendaraan

* Praktikum INDIVIDUAL
* Kerja ulang TEST 1 dengan MATLAB
→ tfzss
→ ssztf4
 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

Strukturformel [H₂ Newton]

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) + \frac{1}{L_a} e_a(t) - \frac{1}{L} e_b(t) \quad \dots (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \dot{\omega}^2 \right) = \tau \dot{\omega} + B \dot{\omega}$$

$$\frac{d\omega(f)}{df} = -\frac{\beta}{j} \omega(f) + \frac{1}{j} T(f) \quad \text{--- (2)}$$

Infat Motor "LINIER" : $\int \cdot T(\theta)$

Substituiert es
permannent (1) oder (2) $\left. \begin{array}{l} \text{Kb (Konstante) \cdot [Amp]} \\ \text{Kb} = \text{Konstante} \cdot \text{GL Lawras (Bade EM)} \\ \text{(sifot generatr)} \cdot \left[\frac{\text{Volt} \cdot \text{sec}}{\text{rad}} \right] \end{array} \right\} * \quad e_b(t) = K_b \omega(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K_b}{L_a} \omega(t) + \frac{1}{L_a} e_a(t) \\ &= -\frac{B}{J} \omega(t) + \frac{1}{J} (K_m i_a(t)) \\ &= \frac{K_m}{J} i_a(t) - \frac{B}{J} \omega(t) \end{aligned}$$

State Assignment (SISO) $m=1, n$

$$\left. \begin{aligned} u &= \varrho_a(t) \\ y &= \omega(t) \\ x_1 &= i_a(t) \\ x_2 &= \omega(t) \end{aligned} \right\} \text{Pengukuran}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K_b}{L_a} x_2 + \frac{1}{L_a} u \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_m}{J} x_1 - \frac{B}{J} x_2 \end{aligned}$$

Page 1

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathbb{C}_{(1 \times 2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} u$$

Prata keadaan STATIK

$$-\frac{R_a}{I_a} I_a - \frac{K_b}{I_a} \omega + \frac{1}{I_a} F_a = 0$$

$$\rightarrow -R_a L_a - K_B \omega + F_a = 0$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{K_m}{T} I_a - \frac{B}{T} \omega = 0$$

$$I_a = \frac{B}{K_m} \omega \rightarrow \frac{B}{K_m} = \frac{T_a}{\omega} = \frac{2.5}{(2\pi/60) \times 4000}$$

$$\rightarrow -R_a \left[\frac{B}{E_m} \omega \right] - K_b \omega + E_a = 0$$

$$\frac{-R_a B - K_m K_b}{K_m} \omega = -E_a$$

$$K = \frac{W}{F_a} = \frac{K_m}{R_a B + K_m K_b} = \frac{1}{R_a \left[\frac{B}{K_m} \right] + K_b} \quad \leftarrow$$

Yang bisa diukur: K , $\frac{B}{K_m}$, dan K_b dari mengukur E_a , ω dan K_a

Servo Kecepatan dengan umpan-balik perubahan

$\begin{matrix} \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} e_a(t) \\ (V) \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \hat{A} \\ y = Cx + D \\ x_1 \quad x_2 \end{matrix}$
 $\omega(t)$

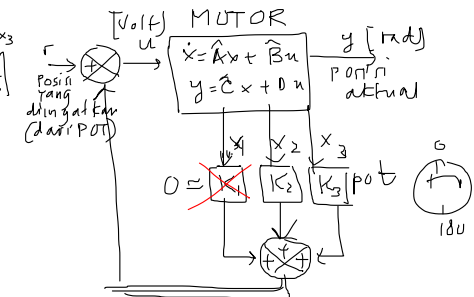
$i_a(t)$
 (A_{mp})

nginkan

so  Tadho
(Volt)

* Servo Posisi : $\theta(t)$: posisi sudut $\rightarrow$
 $\therefore d\theta(t)$: ω $x = [x_1$

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{J} & -\frac{K_2}{J} & 0 \\ \frac{K_2}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \hat{B} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{C} &= [0 \quad 0 \quad 1] & D &= [0] \end{aligned}$$

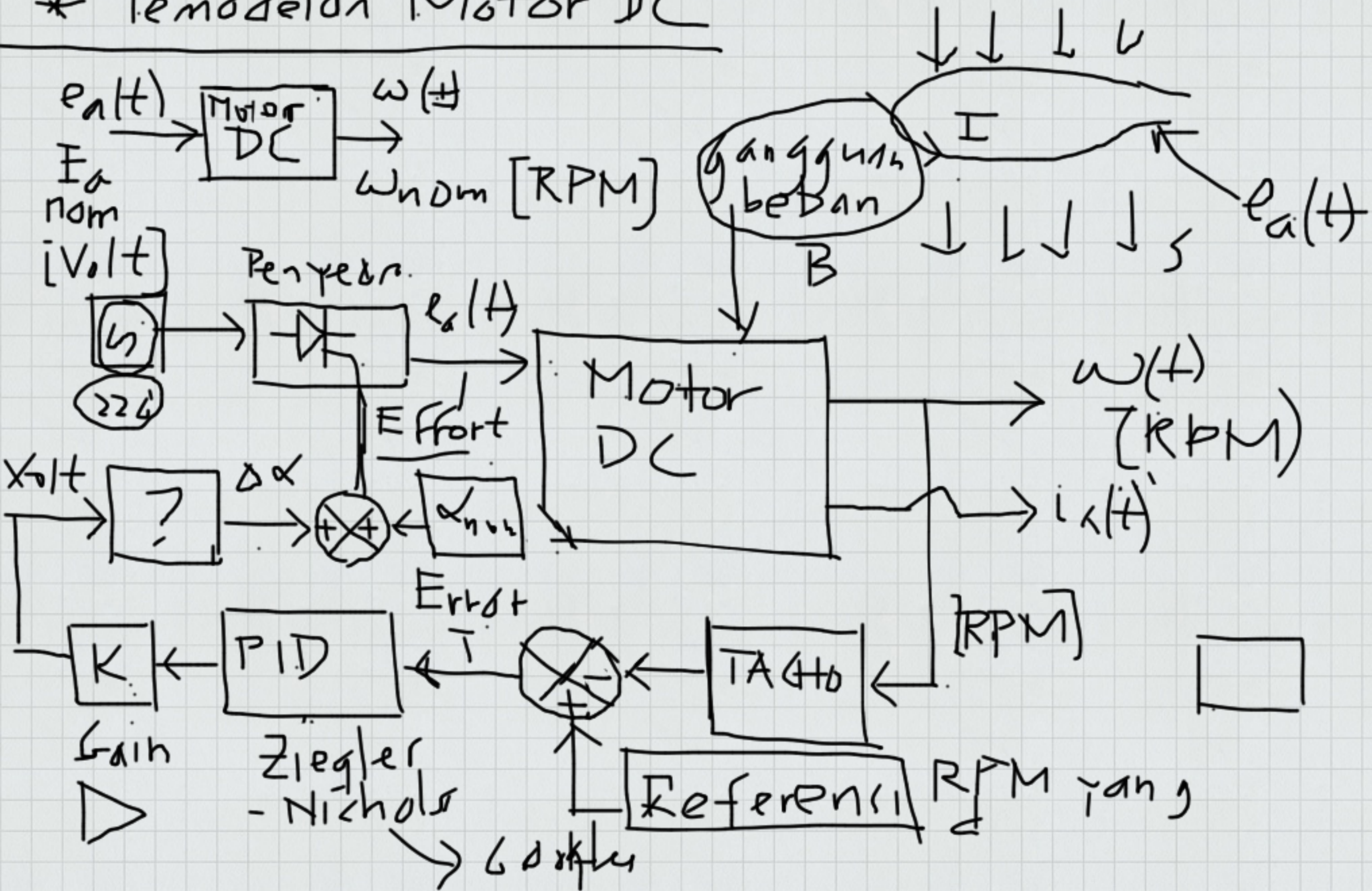


-BANGUN SIMULINK LAB

↓

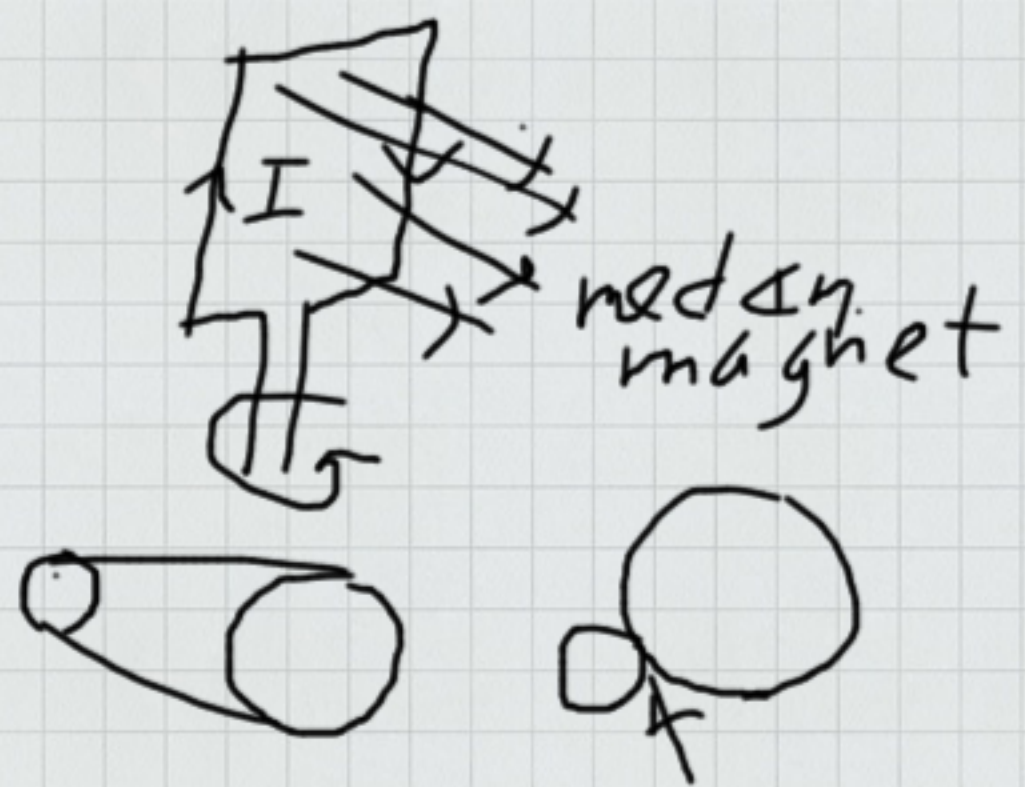
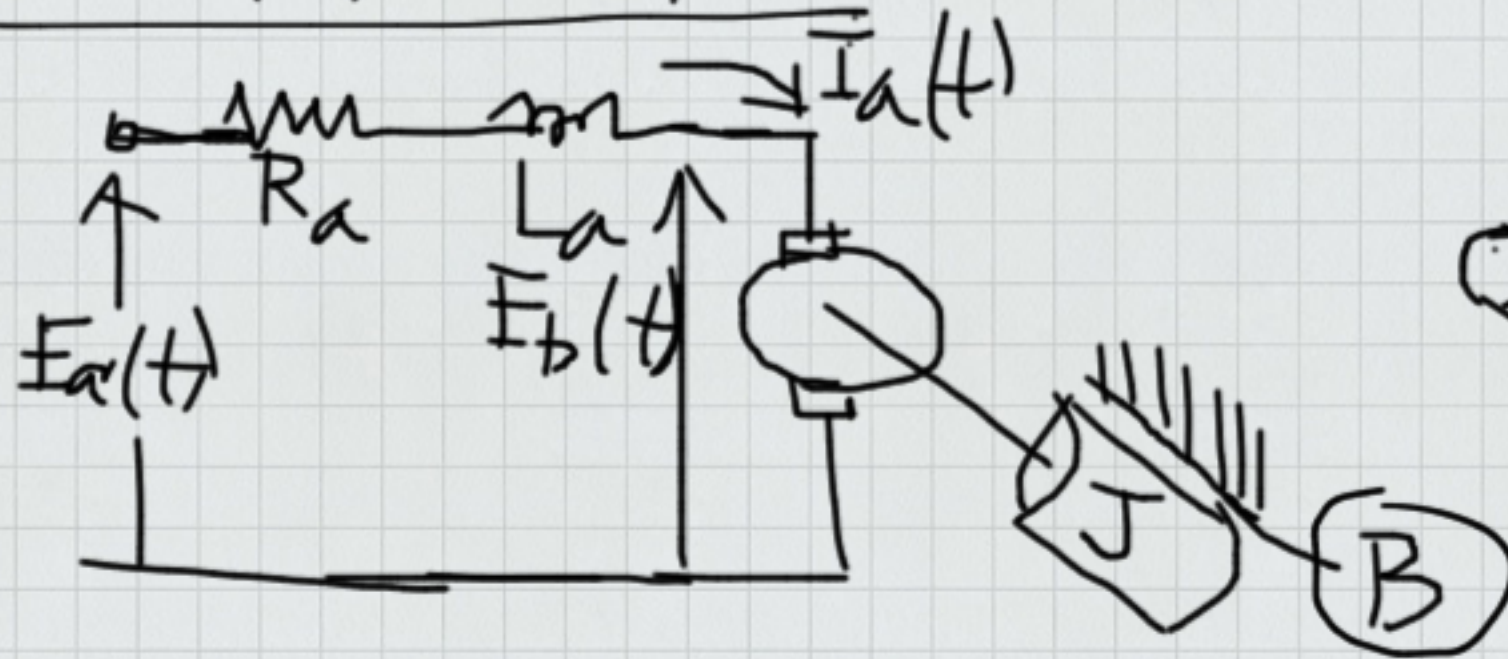
diskusi!

* Permodelan Motor DC



Model Motor DC

* Model FISIKA



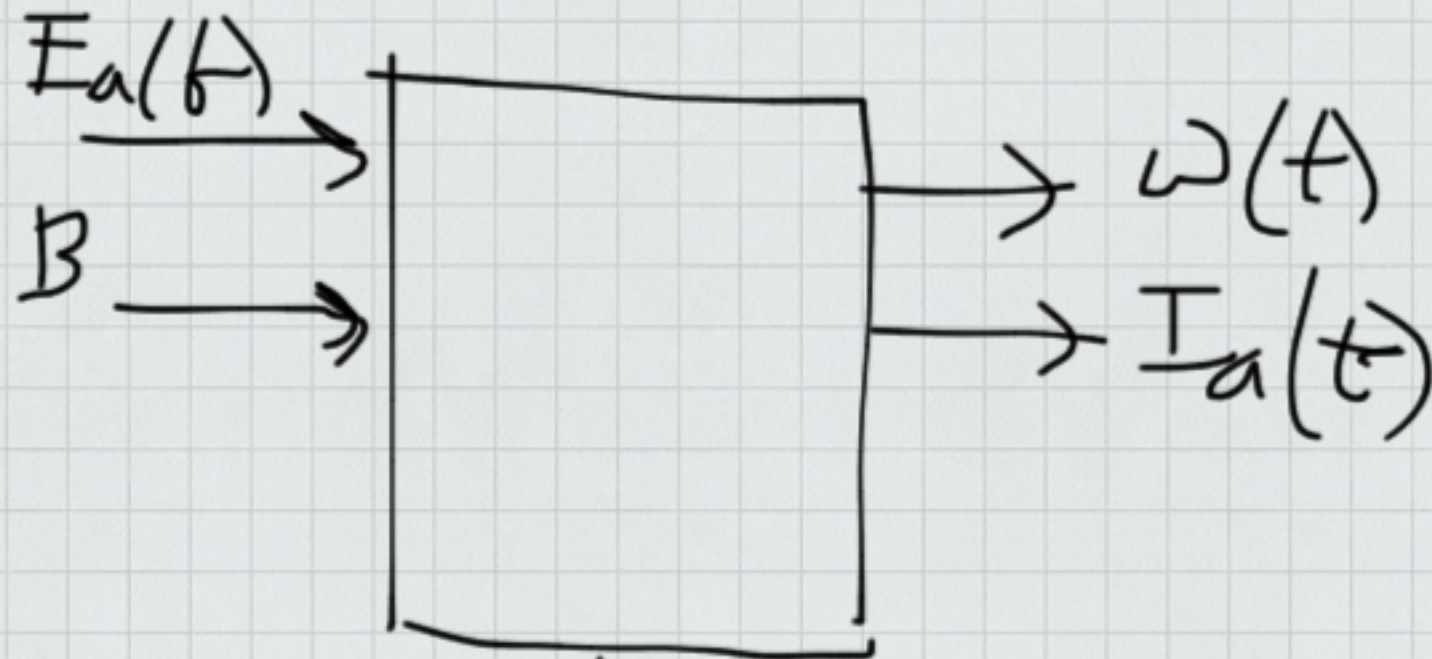
* Model Matematik

- (1) Hukum Ohm: $E_a(t) - E_b(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt}$
- (2) Hukum Newton: $T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$
- (3) Motor: $T(t) = K_m I_a(t)$
- (4) Generator: $E_b(t) = K_b \omega(t)$

Dari (1) $\rightarrow \frac{dI_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a} [E_a(t) - E_b(t) - R_a I_a(t)]$

Dari (2) $\rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{J} [T(t) - B \omega(t)]$

$\rightarrow$ Simulink $\uparrow$ external



Steady state
 $B = \phi \rightarrow I_a \approx 0$

$E_a - E_b \approx 0$

$E_a = K_b \cdot \omega \rightarrow E_a$
 $K_b = \frac{V_{oll. sel}}{\omega}$
 ω rad

* Model Ruang Keadaan Motor DC

State assignment:

RPM

$$y = \omega \text{ (rad/sec)}$$

$$\begin{cases} u = E_a \\ x_1 = I_a \end{cases}$$

$$x_2 = \omega$$

Bes Watt
nom

$$\dot{x}_1 = \frac{dI_a}{dt} = \frac{1}{L_a} (E_a - E_b - I_a R_a)$$

$$= \frac{1}{L_a} (u - K_b x_2 - R_a x_1)$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K_b}{L_a} x_2 + \frac{1}{L_a} u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} (T(t) - B\omega)$$

$$x_2 = \frac{K_m}{J} x_1 - \frac{B}{J} x_2$$

K_m & K_b

B, J ditentukan

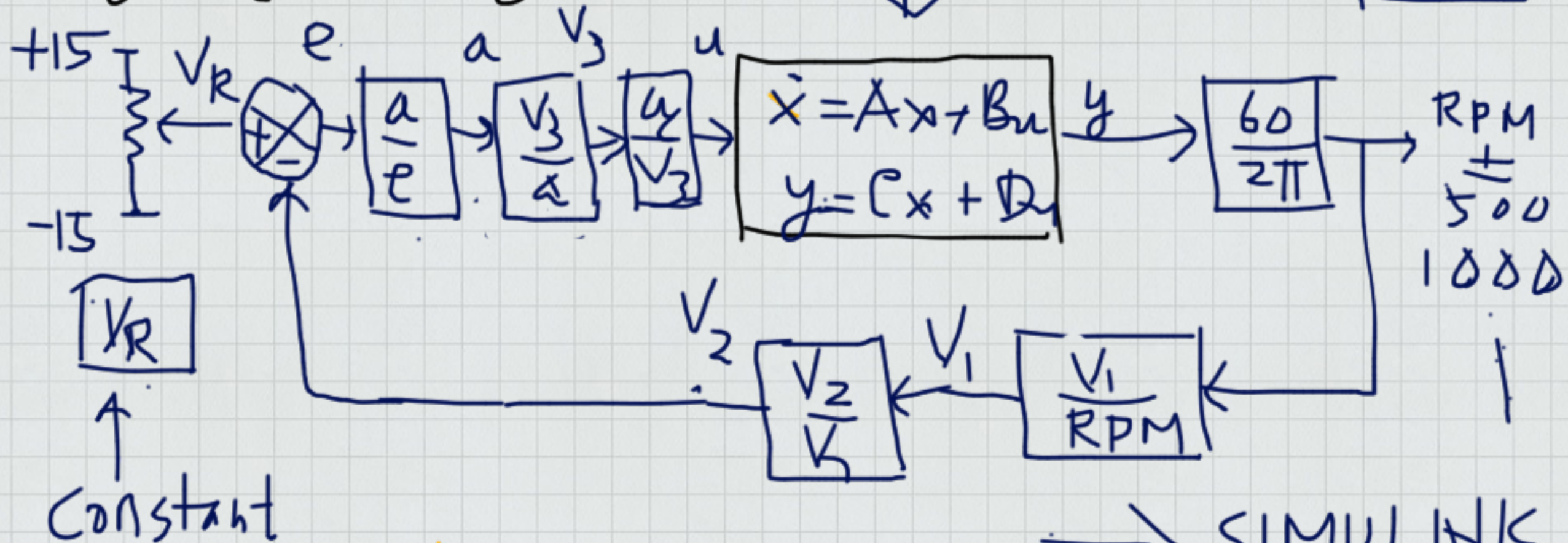
R_a diukur
 L_a diukur
 $K_b = \frac{E_a}{\omega}$

$B = 0$
steady state

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Display

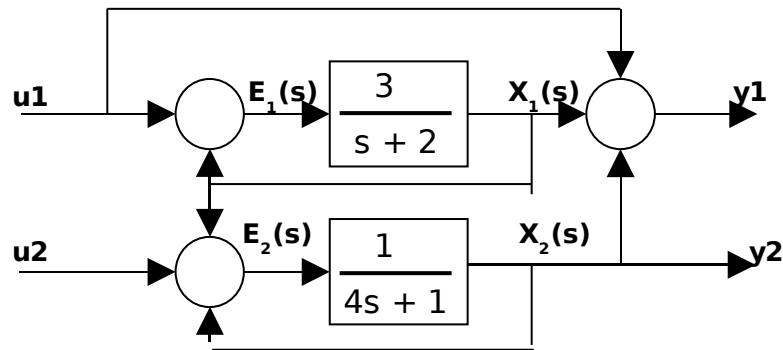


⇒ FINAL = 8/12/2016

⇒ SIMULINK

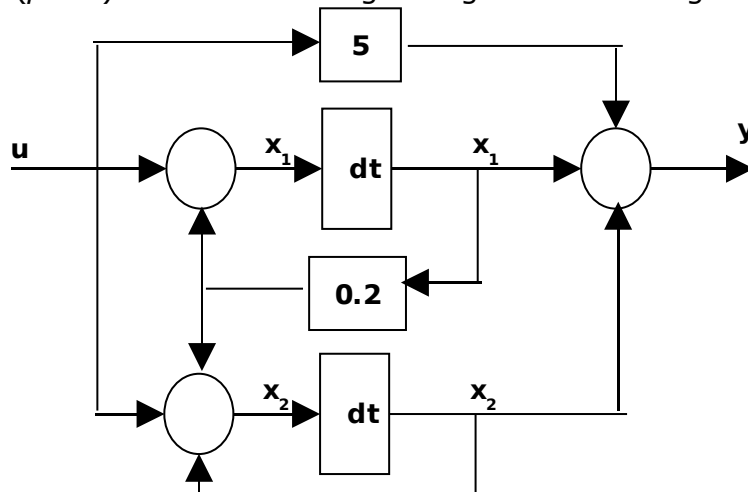
Jangan lupa TULISKAN NAMA dan NO. STB. pada lembar jawaban

Ubahlah Model Nisbah Alih (*Transfer Function*) di bawah ini menjadi Model Ruang Keadaan (*State Space*) dengan 2 (dua) masukan, 2 (dua) luaran dan 2 (dua) peubah keadaan (20 point):



Petunjuk: tentukan terlebih dahulu $\mathbf{x}_1 = s\mathbf{X}_1(s)$ dan $\mathbf{x}_2 = s\mathbf{X}_2(s)$ masing-masing dari Nisbah Alih $\mathbf{X}_1(s)/\mathbf{E}_1(s)$ dan $\mathbf{X}_2(s)/\mathbf{E}_2(s)$!

Suatu kendalian (*plant*) dimodelkan dengan bagan kotak sebagai berikut:



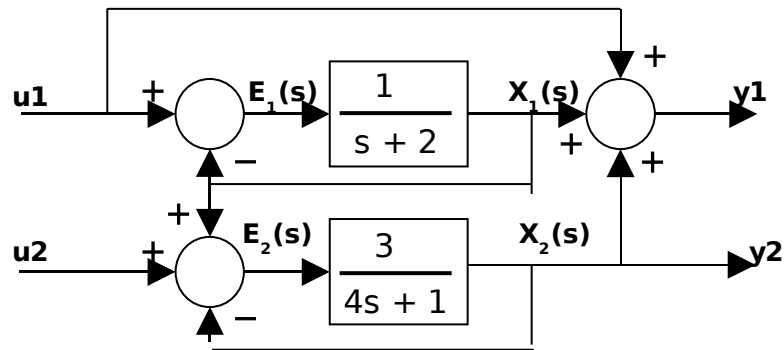
- (15 point) Tentukan Model Ruang Keadaan dari kendalian tersebut di atas!
- (10 point) Dari Model Ruang Keadaan di atas, tentukan Model Nisbah Alih-nya
- (10 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A}$, apakah kendalian ini stabil?
- (10 point) Lakukan transformasi similaritas pada model di atas dengan matrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (5 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A} = \mathbf{TAT}^{-1}$ hasil transformasi !
- Tentukan keterkendalian (*controllability*) dan keteramatan (*observability*) dari model kendalian hasil transformasi (10 point)
- Jika kendalian hasil transformasi di atas akan dikendalikan dengan umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*), maka:
 - Gambarkan bagan-kotak kendalian hasil transformasi dengan dua integrator seperti (tapi tentu tidak sama dengan) aslinya di atas, ditambah pengendali *gain-matrix* $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2]$ (10 point)
 - Tentukanlah $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$ agar nilai-nilai eigen matrix $[\mathbf{A} + \mathbf{BK}]$ menjadi nilai eigen kembar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (10 point)

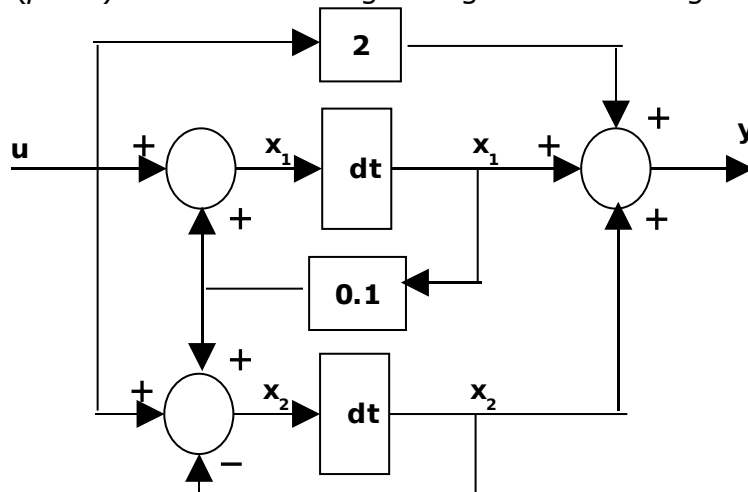
Jangan lupa TULISKAN NAMA dan NO. STB. pada lembar jawaban

Ubahlah Model Nisbah Alih (*Transfer Function*) di bawah ini menjadi Model Ruang Keadaan (*State Space*) dengan 2 (dua) masukan, 2 (dua) luaran dan 2 (dua) peubah keadaan (20 point):



Petunjuk: tentukan terlebih dahulu $\mathbf{x}_1 = s\mathbf{X}_1(s)$ dan $\mathbf{x}_2 = s\mathbf{X}_2(s)$ masing-masing dari Nisbah Alih $\mathbf{X}_1(s)/\mathbf{E}_1(s)$ dan $\mathbf{X}_2(s)/\mathbf{E}_2(s)$!

Suatu kendalian (*plant*) dimodelkan dengan bagan kotak sebagai berikut:



- (15 point) Tentukan Model Ruang Keadaan dari kendalian tersebut di atas!
- (10 point) Dari Model Ruang Keadaan di atas, tentukan Model Nisbah Alih-nya
- (10 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A}$, apakah kendalian ini stabil?
- (10 point) Lakukan transformasi similaritas pada model di atas dengan matrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

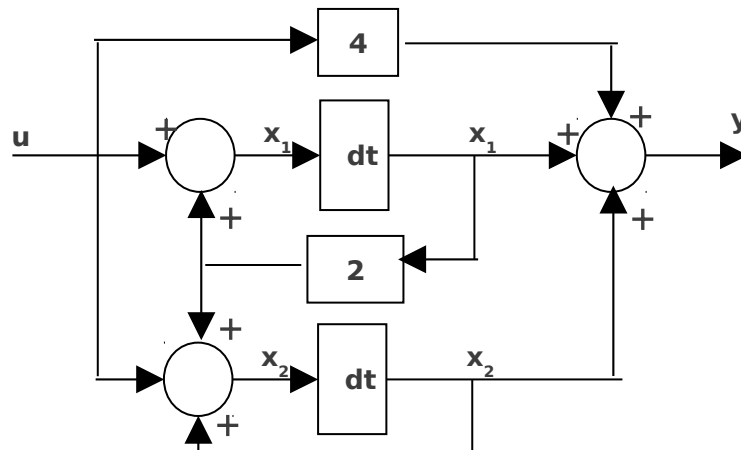
- (5 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A} = \mathbf{TAT}^{-1}$ hasil transformasi !
- Tentukan keterkendalian (*controllability*) dan keteramatan (*observability*) dari model kendalian hasil transformasi (10 point)
- Jika kendalian hasil transformasi di atas akan dikendalikan dengan umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*), maka:
 - Gambarkan bagan-kotak kendalian hasil transformasi dengan dua integrator seperti (tapi tentu tidak sama dengan) aslinya di atas, ditambah pengendali *gain-matrix* $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2]$ (10 point)
 - Tentukanlah $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$ agar nilai-nilai eigen matrix $[\mathbf{A} + \mathbf{BK}]$ menjadi nilai eigen kembar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (10 point)

1. Ubahlah Model Nisbah Alih (*Transfer Function*) di bawah ini menjadi Model Ruang Keadaan (*State Space*) dengan matrix A berbentuk *Jordan Companion matrix* (20 point):

$$(a) G(s) = \frac{3s + 1}{(4s + 1)(5s + 1)^2}$$

$$(b) G(s) = \frac{(3s + 1)^3}{(4s + 1)(5s + 1)^2}$$

2. Suatu kendalian (*plant*) dimodelkan dengan bagan kotak sebagai berikut:



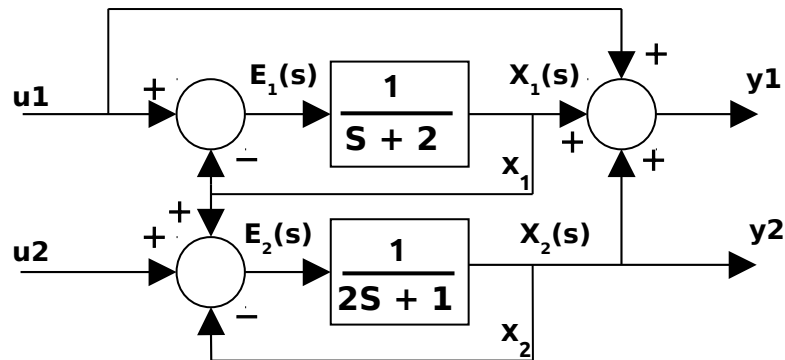
- (a) (15 point) Tentukan Model Ruang Keadaan dari kendalian tersebut di atas!
 (b) (10 point) Dari Model Ruang Keadaan di atas, tentukan Model Nisbah Alih-nya
 (c) (10 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix A, apakah kendalian ini stabil?
 (d) (10 point) Lakukan transformasi similaritas pada model di atas dengan matrix:

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- (e) (5 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $A = TAT^{-1}$ hasil transformasi !
 (f) Tentukan keterkendalian (*controllability*) dan keteramatan (*observability*) dari model kendalian hasil transformasi (10 point)
 (g) Jika kendalian hasil transformasi di atas akan dikendalikan dengan umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*), maka:
 ○ Gambarkan bagan-kotak kendalian hasil transformasi dengan dua integrator seperti (tapi tentu tidak sama dengan) aslinya di atas, ditambah pengendali *gain-matrix* $K = [K_1 \ K_2]$ (10 point)
 ○ Tentukanlah K_1 dan K_2 agar nilai-nilai eigen matrix $[A + BK]$ menjadi nilai eigen kembar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (10 point)

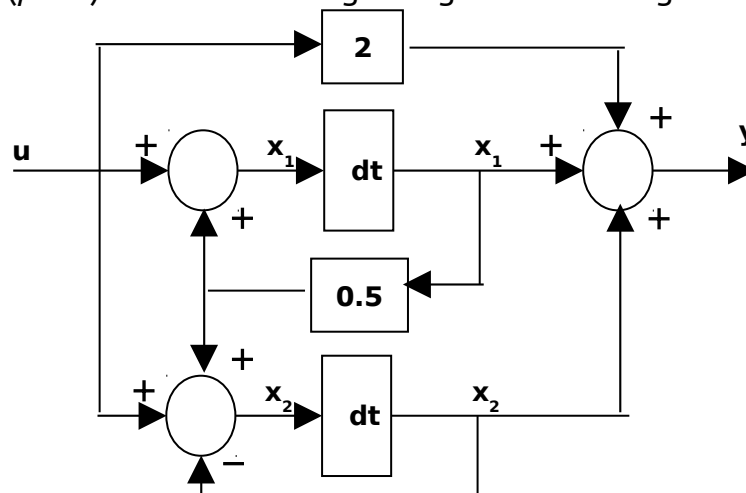
Jangan lupa TULISKAN NAMA dan NO. STB. pada lembar jawaban

Ubahlah Model Nisbah Alih (*Transfer Function*) di bawah ini menjadi Model Ruang Keadaan (*State Space*) dengan 2 (dua) masukan, 2 (dua) luaran dan 2 (dua) peubah keadaan (20 point):



Petunjuk: tentukan terlebih dahulu $x_1 = sX_1(s)$ dan $x_2 = sX_2(s)$ masing-masing dari Nisbah Alih $X_1(s)/E_1(s) = 1/(s+2)$ dan $X_2(s)/E_2(s) = 1/(2s+1)$, kemudian substitusi $E_1(s)$ dengan u_1 dan x_1 serta $E_2(s)$ dengan u_2 , x_1 dan x_2 untuk menyusun persamaan keadaan.

Suatu kendalian (*plant*) dimodelkan dengan bagan kotak sebagai berikut:



- (15 point) Tentukan Model Ruang Keadaan dari kendalian di atas!
- (10 point) Dari Model Ruang Keadaan di atas, tentukan Model Nisbah Alih-nya
- (10 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A}$, apakah kendalian ini stabil?
- (10 point) Tentukan keterkendalian (*controllability*) dan keteramatan (*observability*) dari model kendalian di atas
- Jika kendalian di atas akan dikendalikan dengan umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*), maka:
 - Gambarkan bagan-kotak sistem kendali yang terdiri dari kendalian di atas, ditambah pengendali *gain-matrix* $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2]$ (10 point)
 - Tentukanlah $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$ agar nilai-nilai eigen matrix $[\mathbf{A} + \mathbf{BK}]$ menjadi nilai eigen kembar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (10 point)
- (10 point) Lakukan transformasi similaritas pada model di atas dengan matrix:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

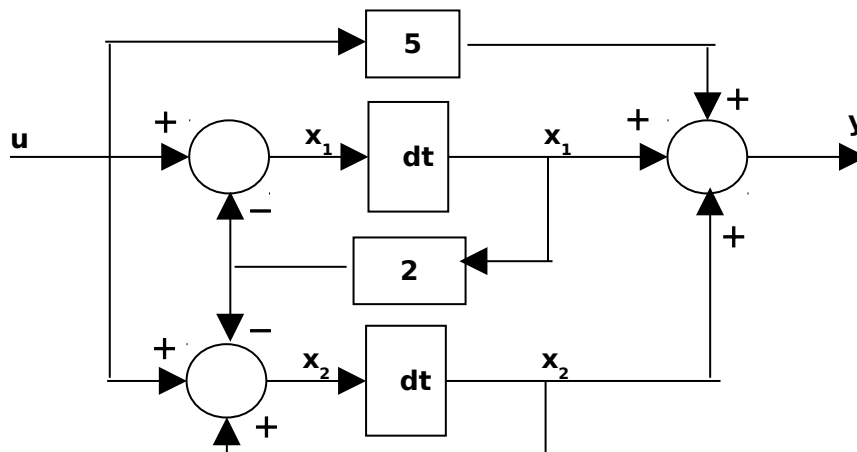
- (5 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A} = \mathbf{TAT}^{-1}$ hasil transformasi !

1. Ubahlah Model Nisbah Alih (*Transfer Function*) di bawah ini menjadi Model Ruang Keadaan (*State Space*) dengan matrix *A* berbentuk *Jordan Companion matrix* (20 point):

$$(a) G(s) = \frac{3s + 2}{(5s + 2)(4s + 1)^2}$$

$$(b) G(s) = \frac{(3s + 2)^3}{(5s + 2)(4s + 1)^2}$$

2. Suatu kendalian (*plant*) dimodelkan dengan bagan kotak sebagai berikut:



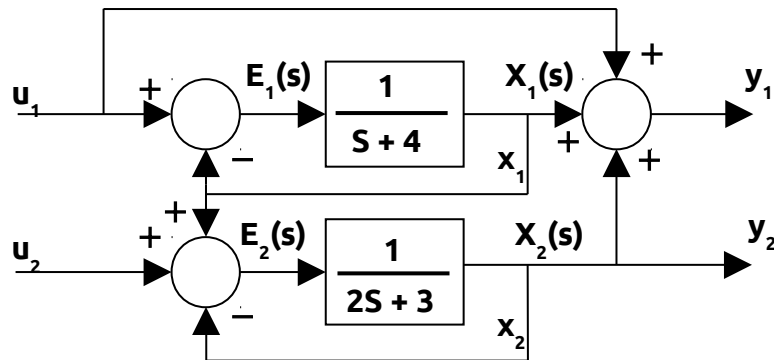
- (a) (15 point) Tentukan Model Ruang Keadaan dari kendalian tersebut di atas!
 (b) (10 point) Dari Model Ruang Keadaan di atas, tentukan Model Nisbah Alih-nya
 (c) (10 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix **A**, apakah kendalian ini stabil?
 (d) (10 point) Lakukan transformasi similaritas pada model di atas dengan matrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (e) (5 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix **A** = **TAT**⁻¹ hasil transformasi !
 (f) Jika kendalian hasil transformasi di atas akan dikendalikan dengan umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*), maka:
 o Gambarkan bagan-kotak kendalian hasil transformasi dengan dua integrator seperti (tapi tentu tidak sama dengan) aslinya di atas. (10 point)
 o Tambahkan pada gambar bagan-kotak kendalian hasil transformasi di atas pengendali umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*) dengan *gain-matrix* **K** = [**K**₁ **K**₂] ! (10 point)
 o Tentukanlah **K**₁ dan **K**₂ agar nilai-nilai eigen matrix [**A** - **BK**] menjadi nilai eigen kembar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (10 point)

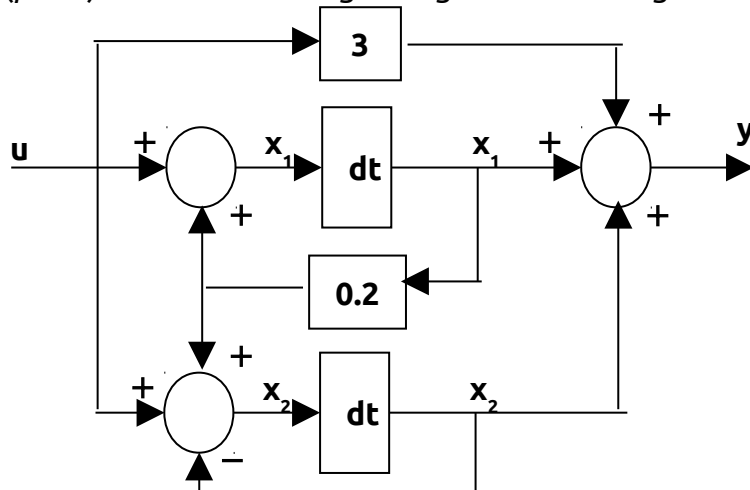
Jangan lupa TULISKAN NAMA dan NO. STB. pada lembar jawaban

Ubahlah Model Nisbah Alih (*Transfer Function*) di bawah ini menjadi Model Ruang Keadaan (*State Space*) dengan 2 (dua) masukan, 2 (dua) luaran dan 2 (dua) peubah keadaan (20 point):



Petunjuk: tentukan terlebih dahulu $x_1 = sX_1(s)$ dan $x_2 = sX_2(s)$ masing-masing dari Nisbah Alih $X_1(s)/E_1(s) = 1/(s+4)$ dan $X_2(s)/E_2(s) = 1/(2s+3)$, kemudian substitusi $E_1(s)$ dengan u_1 dan x_1 serta $E_2(s)$ dengan u_2 , x_1 dan x_2 untuk menyusun persamaan keadaan.

Suatu kendalian (*plant*) dimodelkan dengan bagan kotak sebagai berikut:



- (15 point) Tentukan Model Ruang Keadaan dari kendalian di atas!
- (10 point) Dari Model Ruang Keadaan di atas, tentukan Model Nisbah Alih-nya
- (10 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A}$, apakah kendalian ini stabil?
- (10 point) Tentukan keterkendalian (*controllability*) dan keteramatan (*observability*) dari model kendalian di atas
- Jika kendalian di atas akan dikendalikan dengan umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*), maka:
 - Gambarkan bagan-kotak sistem kendali yang terdiri dari kendalian di atas, ditambah pengendali *gain-matrix* $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2]$ (10 point)
 - Tentukanlah $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$ agar nilai-nilai eigen matrix $[\mathbf{A} + \mathbf{BK}]$ menjadi nilai eigen kembar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (10 point)
- (10 point) Lakukan transformasi similaritas pada model di atas dengan matrix:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- (5 point) Tentukan nilai-nilai eigen dari matrix $\mathbf{A} = \mathbf{TAT}^{-1}$ hasil transformasi !