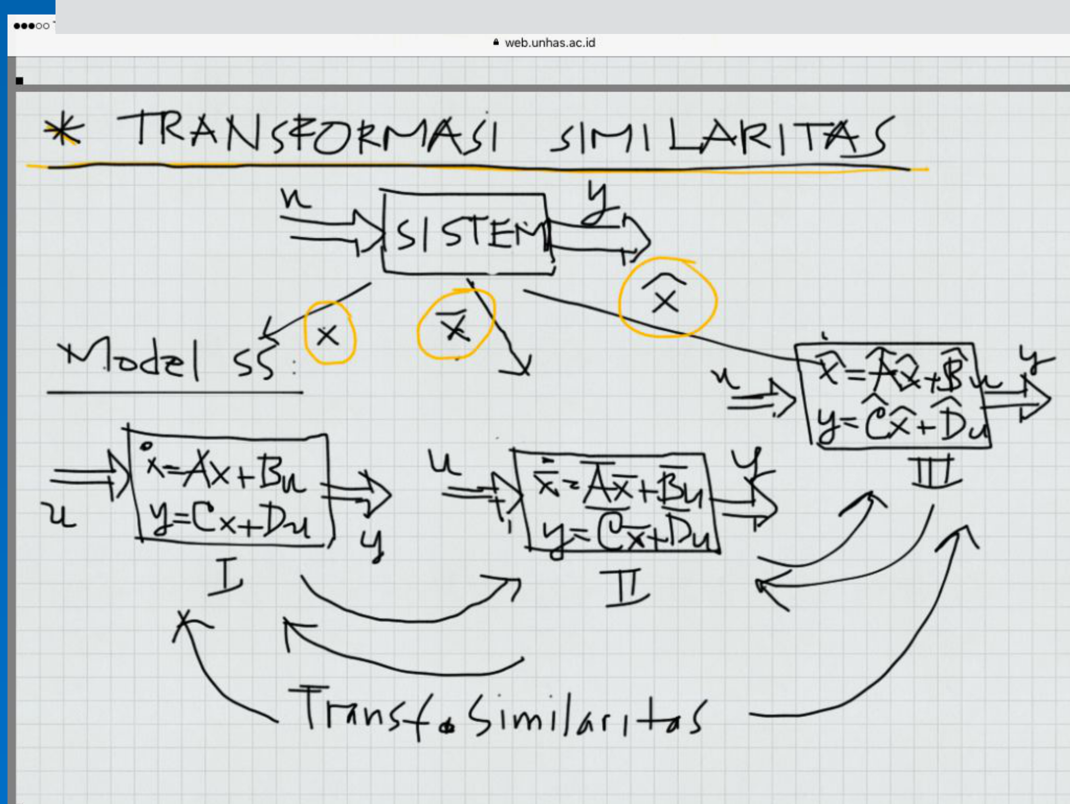
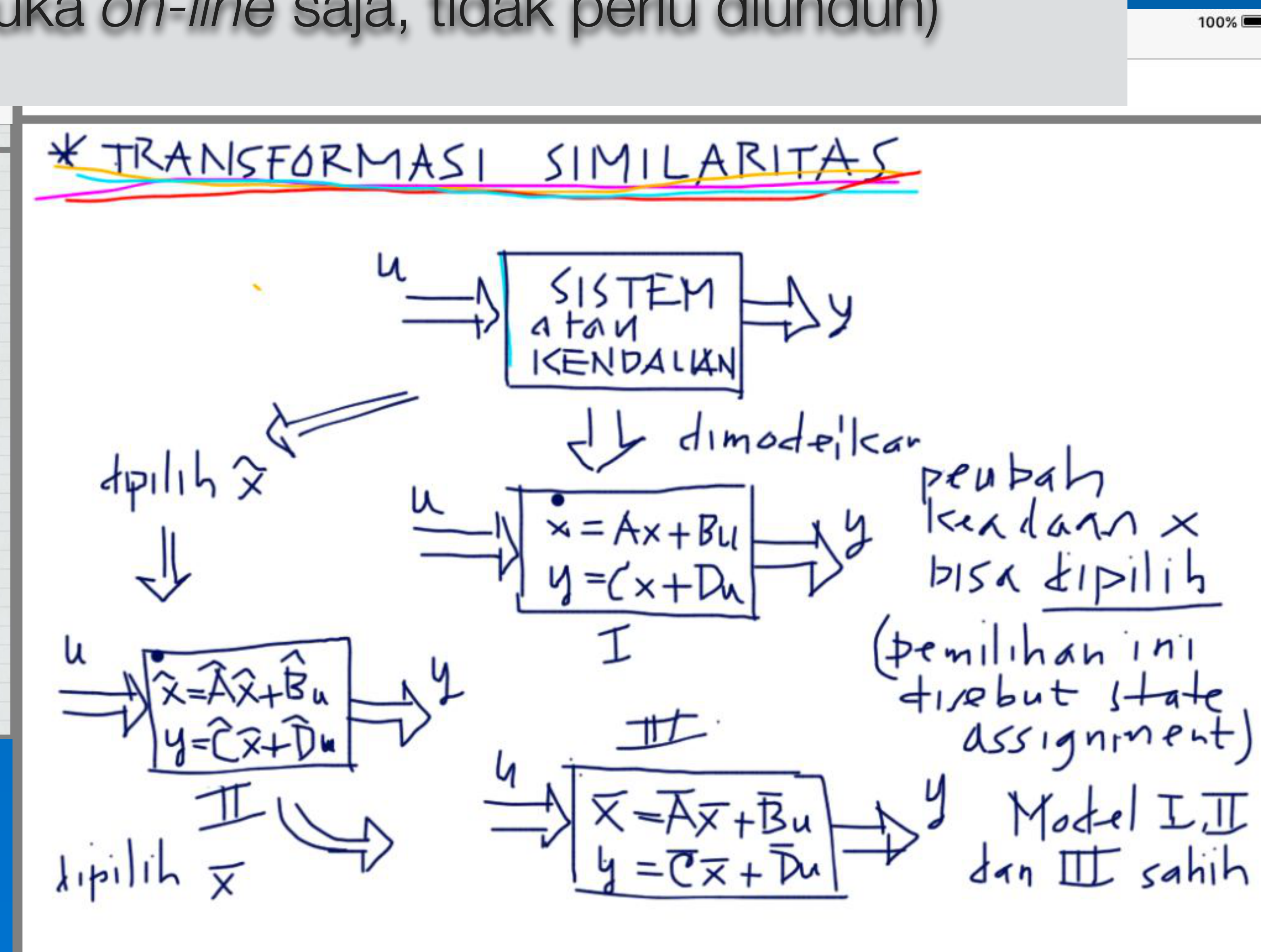
328D4103
Sistem Kendali + Praktikum
MODUL 04
Transformasi SIMILARITAS

(Semester Awal 2020-2021

Transformasi SIMILARITAS

- Sumber pembelajaran: https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Sistem-Kendali/Catatan-Kuliah-2017/
- Catatan Kuliah Lengkap 2016-2017: https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Sistem-Kendali/Catatan-Kuliah-Sistem-Kendali-2016-2017.pdf (dibuka *on-line* saja, tidak perlu diunduh)





SIMILARITAS Model

- Dari suatu kendalian atau sistem kendali dapat dibangun **banyak model** Ruang Keadaan yang ber-**beda-beda** matrix **A, B** dan **C**-nya, tapi semua **sahih** (***valid***).
- Perbedaan model itu disebabkan pemilihan peubah keadaan (***state-assignment***) yang berbeda, misalnya untuk Model I dipilih peubah keadaan **x**, untuk Model II dipilih $\bar{\mathbf{x}}$, Model III dipilih $\bar{x}$, dst.
- Model-model Ruang Keadaan yang diturunkan dari **satu** sistem kendali atau kendalian yang **sama** dikatakan model-model yang **SIMILAR** (**SERUPA**) walau pun tak sama.

TRANFORMASI Model I <-> Model II <-> Model III, dst

- Semua model yang **SIMILAR** akan menghasilkan keluaran **y** yang **sama** dari masukan **u** dan **keadaan awal** yang **sama**. (*Note*: Tapi belum tentu sebaliknya).
- Model-model Ruang Keadaan yang **SIMILAR** terhubung satu sama lain dengan suatu matrix yang disebut **Matrix Transformasi Similaritas T**.

MATRIX TRANSFORMASI SIMILARITAS T

- **Matrix Transformasi Similaritas T** untuk model Ruang Keadaan dengan **n** buah peubah keadaan **x** adalah sembarang matrix [**n**x**n**], yang bersifat:
  - *Invertible*, mempunyai *inverse* $\mathbf{T}^{-1}$
  - *Non-singular*
  - Determinan-nya tidak NOL
  - $\mathbf{T}\,\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$ (matrix identitas)

Transformasi Peubah Keadaan x dan Matrix2

$$u \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \end{aligned}} \rightarrow y \quad \xRightarrow{\ \mathbf{T}\ } \quad u \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{aligned}} \rightarrow y$$

Peubah Keadaan: $\mathbf{x} \longrightarrow \hat{x} = \mathbf{T\,x}$

$\mathbf{A} \longrightarrow \hat{A} = \mathbf{TAT^{-1}}$

$\mathbf{B} \longrightarrow \hat{B} = \mathbf{TB}$

$\mathbf{C} \longrightarrow \hat{C} = \mathbf{CT^{-1}}$

$\mathbf{D} \longrightarrow \hat{D} = \mathbf{D}$

$\boxed{\hat{x} = Tx} \rightarrow \dot{\hat{x}} = T\dot{x} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$

kalikan T^{-1}:

$A = T^{-1}\hat{A}T$

$TA = TT^{-1}\hat{A}T$

$TA = \hat{A}T$

$TAT^{-1} = \hat{A}TT^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{\hat{A} = TAT^{-1}}$

$\underbrace{T^{-1}T}_{I}\dot{x} = T^{-1}\hat{A}\hat{x} + T^{-1}\hat{B}u$

$\dot{x} = T^{-1}\hat{A}\hat{x} + T^{-1}\hat{B}u$

$= \underbrace{T^{-1}\hat{A}T}x + \underbrace{T^{-1}\hat{B}}u$

$= Ax + Bu$

$B = T^{-1}\hat{B}$

$TB = TT^{-1}\hat{B} \rightarrow \boxed{\hat{B} = TB}$

$y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u = \hat{C}Tx + \hat{D}u = Cx + Du$

$C = \hat{C}T \rightarrow CT^{-1} = \hat{C}TT^{-1}$ $\boxed{\hat{D} = D}$

$\boxed{\hat{C} = CT^{-1}}$

Transf. Similaritas dapat dilakukan dari Model I ke Model II ke Model III dan sebaliknya dengan memilih peubah keadaan $\hat{x} = Tx$, dengan $T[n \times n]$ yang punya inverse T^{-1}, $TT^{-1} = I$.

$T = \underbrace{\text{invertible}}_{\text{(punya inverse)}} = \text{non-singular} \rightarrow \det(T) \neq 0$

T bisa dipilih sembarang $[n \times n]$, $\det(T) \neq 0$ berarti T^{-1} ada, sehingga $TT^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{bmatrix} \xRightarrow[\hat{x} = Tx]{\text{Transf. Similaritas}} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{bmatrix}$$

CONTOH2 TRANSFORMASI SIMILARITAS

Contoh: $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ $C = [1 \;\; 0]$ $D = [0]$

Tentukan: $\bar{A}$, $\bar{B}$ dan $\bar{C}$ dengan $T = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Jawab: $T = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $\det(T) = -1 \neq 0 \rightarrow$ OK

$$T^{-1} = \frac{adj(T)}{\det(T)} = \frac{\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

check: $TT^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$ ✓

$\bar{x} = Tx$

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = TB = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT^{-1} = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = [-1 \;\; 1]$$

Model I dan Model II adalah TAK SERUPA tapi sebenarnya SAMA (SIMILAR).

Yang SAMA dari kedua Model di atas adalah persamaan karakteristik dari Matrix A pada Model I dan Matrix $\bar{A}$ pada Model II, atau kedua matrix tersebut mempunyai nilai-eigen yang SAMA.

Persamaan Karakteristik: $\det[\lambda I - A] = 0$

λ = nilai-eigen matrix A

$$\det\left[\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda(\lambda+3)+2 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0} \leftarrow \text{Pers. Karak.} \qquad \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$$

Bgm dengan matrix $\bar{A}$?

$$\det\left[\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2\\ 0 & \lambda+2\end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \qquad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

CONTOH2 TRANSFORMASI SIMILARITAS (lanjutan)

Contoh: Suatu sistem dimodelkan dengan model Ruang Keadaan $\begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ $D = [5]$

Lakukan Transf. Similaritas dengan

$\hat{x} = Tx$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det(T) = 1 \neq 0$

Jawab

$T^{-1} = \dfrac{adj(T)}{\det(T)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

check

$TT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ OK!

Hasil Transf.

$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\hat{D} = D = (5)$

$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Hasil Transformasi $\hat{x} = Tx \rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\hat{D} = [5]$

Catatan:

* Karena sistem di atas adalah SISO, maka tentu bisa diubah menjadi model Nisbah Alih $\underline{G(s)} = \hat{C}[sI-\hat{A}]^{-1}\hat{B}+\hat{D} = C[sI-A]^{-1}B+\underline{D}$ (Tunjukkan!)
* Bisa ditunjukkan bahwa nilai-eigen matrix A sama dengan nilai eigen matrix $\hat{A}$

Jika nilai-eigen matrix A : λ, berlaku

$\det[\lambda I - A] = 0$

dan $\det[\lambda I - \hat{A}] = 0$

$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}$

$\det[\lambda I - A] = 0 \rightarrow (\lambda-1)(\lambda-4) - 6 = 0$

pers. karakt. $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = -$

$[\lambda I - \hat{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{bmatrix}$

$\det[\lambda I - \hat{A}] = 0 \rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3) - 8 = 0$

pers. karakter. $\underline{\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0} \rightarrow \lambda_{1,2}$

Kesimpulan:

$\boxed{\text{Transf. Similaritas tidak mengubah nilai-eigen/pers. karakteristik dari matrix A}}$

Khusus untuk SISO, nilai-eigen dari matrix A itu juga merupakan pole-pole dari G(s), model Nisbah Alih-nya

MODUL PEMBELAJARAN SELANJUTNYA

- MODUL 01: (Pengantar/*Review*) Model RUANG KEADAAN (*State Space*)
- MODUL 02: Konversi Model RUANG KEADAAN ke NISBAH ALIH (ss2tf)
- MODUL 03: Konversi Model NISBAH ALIH ke RUANG KEADAAN (tf2ss)
- MODUL 04: Transformasi SIMILARITAS
- **MODUL 05: TANGGAPAN dan KESTABILAN**
- MODUL 06: KETERKENDALIAN dan KETERAMATAN
- MODUL 07: UMPAN-BALIK PEUBAH KEADAAN
- MODUL 08: PRAKTIKUM INDIVIDU & KELOMPOK

SELAMAT BELAJAR

Semoga SUKSES meraih PRESTASI!