328D4103
Sistem Kendali + Praktikum
MODUL 05
Tanggapan dan Kestabilan

(Semester Awal 2020-2021

Tanggapan dan Kestabilan

- Sumber pembelajaran: https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Sistem-Kendali/Catatan-Kuliah-2017/
- Catatan Kuliah Lengkap 2016-2017: https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Sistem-Kendali/Catatan-Kuliah-Sistem-Kendali-2016-2017.pdf (dibuka *on-line* saja, tidak perlu diunduh)

* Tanggapan dan Kestabilan ←

Pers. Keadaan : $\dot{x} = Ax + Bu$

→ pers. differensial :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

diperoleh :

→ $x(t)$ = solusi pers. differensial jika diketahui $x(0) = X_0$

Kasus

$u(t) = 0$ → solusi "khusus" $x(t)$

$u(t) \neq 0$ → solusi $x(t)$ → TANGGAPAN atau RESPONSE thd $u(t)$

Skalar :

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) \qquad x(0) = X_0$$

a = skalar

$x(t)$ = isyarat tunggal

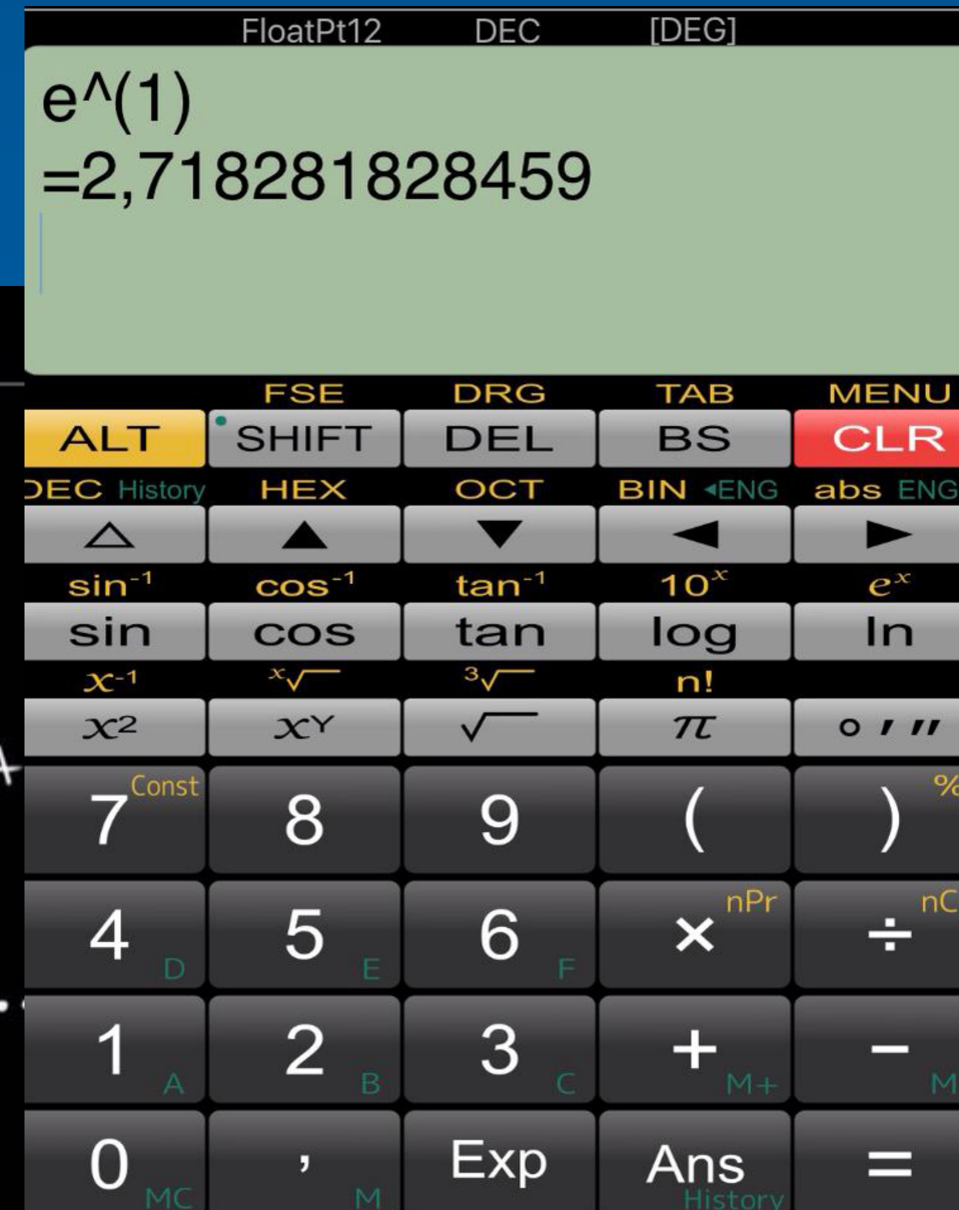
Deret EULER

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + $$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) + \cos(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$



Untuk **x = 1** → **e^1** = **e** = 1 + 1 + (1/2) + (1/6) + (1/24) + (1/120) + ……

= **2,718281828459 …….**

angka di belakang koma merupakan deretan angka 1 -9 yang tidak berpola dan tidak ada habisnya

Persamaan Differensial Order Pertama (SKALAR)

Dengan **a** bilangan *real* skalar dan **t** = *time* (waktu),

dan dengan memanfaatkan **Deret Euler**:

$$x(t) = e^{at} = 1 + (at) + (1/2)(at)^2 + (1/6)(at)^3 + (1/24)(at)^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$dx(t)/dt = d(e^{at})/dt = a + a^2t + (1/2)a^3t^2 + (1/6)a^4t^3 + (1/24)a^5t^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= a\,[1 + (at) + (1/2)(at)^2 + (1/6)(at)^3 + (1/24)(at)^4 + \ldots\ldots\ldots]$$

$$= a[e^{at}] = ax(t)$$

Jadi, **solusi** dari **Persamaan Differensial**: $dx(t)/dt = ax(t)$

adalah: $x(t) = e^{at}$

Persamaan Differensial Order Pertama (VEKTOR, MATRIX)

Sekarang jika:

A matrix [**nxn**], **t** = *time* (waktu), **x(t)** vektor [**nx1**] dengan kondisi awal **x(0)**, dan **I** = Matrix Identitas, serta dengan memanfaatkan **Deret Euler**:

$$x(t)=[e^{At}]x(0)=[I+(At)+(1/2)(At)^2+(1/6)(At)^3+(1/24)(At)^4+.....]x(0)$$

$$dx(t)/dt = d(e^{At})/dt =[A + A^2t + (1/2)A^3t^2 + (1/6)A^4t^3 + (1/24)A^4t^5 +...] x(0)$$

$$= A[I + (At) + (1/2)(At)^2 + (1/6)(At)^3 + (1/24)(At)^4 + ...] x(0)$$

$$= A[e^{at}]x(0)= Ax(t)$$

Jadi, **solusi** dari **Persamaan Differensial**:

$$dx(t)/dt = Ax(t)$$

adalah:

$$x(t) =[e^{At}]x(0)$$

$[e^{At}]$: MATRIX TRANSISI

MATRIX TRANSISI $[e^{At}]$

- **Matrix $[e^{At}]$** [**nxn**] disebut **MATRIX TRANSISI**, karena men-transisi-kan keadaan awal pada **t=0**, **x(0)** ke keadaan pada waktu **t**, **x(t)**.
- **MATRIX TRANSISI** diperoleh dengan menerapkan **Deret Euler**.

SOLUSI PERSAMAAN KEADAAN $\dot{x} = Ax + Bu$

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned}} \longrightarrow y$$

Solusi Persamaan Keadaan: **$x(t)$, $t \geq 0$**

Tanggapan (*response*) terhadap masukan $u = $ **$u(t)$, $t \geq 0$** adalah $y =$ **$y(t)$, $t \geq 0$**

Solusi Persamaan Keadaan **$x(t)$, $t \geq 0$** untuk $u = \mathbf{0}$ disebut **SOLUSI UMUM (NON-HOMOGEN)**

SOLUSI $x = A\dot{x} + Bu$ (lanjutan)

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned}} \longrightarrow y$$

Solusi Umum untuk u = 0: $\mathbf{x(t) = [e^{At}]\, x(0),\ t \geq 0}$

Misalkan Solusi Khusus untuk u = $\mathbf{u(t),\ t \geq 0}$

adalah $\mathbf{x(t) = [e^{At}]\, f(t),\ t \geq 0}$

maka $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{dx(t)/dt = (d[e^{At}]/dt)\, f(t) + [e^{At}](df(t)/dt)}$

padahal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)} = \mathbf{A[e^{At}]f(t) + Bu(t)}$

dan $\mathbf{(d[e^{At}]/dt)} = \mathbf{A[e^{At}]}$

SOLUSI $\dot{x} = Ax + Bu$ (lanjutan)

JADI: $\cancel{A[e^{At}]f(t)} + [e^{At}](df(t)/dt) = \cancel{A[e^{At}]f(t)} + Bu(t)$

ATAU: $[e^{At}](df(t)/dt) = Bu(t)$

$df(t)/dt = [e^{At}]^{-1} Bu(t)$

$df(t) = [e^{At}]^{-1} Bu(t)\, dt$

sehingga **f(t)** dapat diperoleh dengan meng-integral-kan kedua sisi tanda sama-dengan

Solusi Khusus untuk $u = u(t),\ t \geq 0$ adalah $x(t) = [e^{At}]\, f(t),\ t \geq 0$

SOLUSI x(t) adalah **Solusi Umum** + **Solusi Khusus**

MASUKAN u(t) → TANGGAPAN y(t)

Solusi Umum : $\hat{x}(t) = [e^{At}]\,x(0)$

Solusi Khusus : $\bar{x}(t) = [e^{At}]\,f(t)$

$$f(t) = \int_0^t [e^{A\tau}]^{-1} B\,u(\tau)\,d\tau$$

SOLUSI TOTAL: $x(t) = \hat{x}(t) + \bar{x}(t)$

$$x(t) = [e^{At}]\,x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau$$

TANGGAPAN (*response*):

TANGGAPAN:

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

$$y(t) = C\left([e^{At}]\,x(0) + \int_0^t [e^{A(t-\tau)}] B\,u(\tau)\,d\tau\right) + D\,u(t)$$

KESTABILAN

- **DEFINISI:** Suatu **SISTEM KENDALI** atau **KENDALIAN** dikatakan **STABIL** jika **TANGGAPAN DENYUT**-nya menuju **0**.
- **ARTINYA**: Jika masukan **u(t)** berupa **isyarat denyut satuan** menghasilkan keluaran **y(t)** yang menuju **NOL**, maka sistem **STABIL**.

TANGGAPAN DENYUT

Untuk u(t) isyarat denyut satuan, $u(t) = \delta(t)$, maka keluaran:

$$y(t) = C\left[e^{At}\right]x(0) + \underbrace{\cancel{\int_0^t \left[e^{A(t-\tau)}\right] B\,\delta(\tau)\,d\tau} = \emptyset + D\delta(t)}_{\text{untuk } t>0 \text{ karena } \delta(t)=0,\ t>0}$$

Jadi $Y(t) = C\left[e^{At}\right]x(0)$

adalah TANGGAPAN DENYUT

Suatu **SISTEM KENDALI** atau **KENDALIAN** dikatakan **STABIL** jika **TANGGAPAN DENYUT**-nya, yaitu **y(t)** menuju **0**.

- **y(t) menuju 0 jika [e ^{At}] menuju 0 untuk t > 0**
- **…….. dan [e ^{At}] akan menuju 0 jika …………………..**

Matrix Diagonal D dan Nilai Eigen Matrix A

Suatu **SISTEM KENDALI** atau **KENDALIAN** dikatakan **STABIL** jika **TANGGAPAN DENYUT**-nya, yaitu **y(t)** menuju **0**.

- **y(t) menuju 0 jika [e^{At}] menuju 0 untuk t > 0**
- **........ dan [e^{At}] akan menuju 0 jika ....**

Dengan **Transformasi Similaritas**:

dapat ditentukan matrix **D** = **TAT** $^{-1}$

dengan matrix **D [nxn]** adalah **matrix diagonal**,

dengan **SEMUA NILAI EIGEN** matrix **A**

pada **diagonal**-nya

Tanggapan Denyut untuk model Ruang Keadaan dengan Matrix Diagonal D pada Persamaan Keadaan

$$u \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= D\,\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} + Du \end{aligned}} \rightarrow y$$

"SIMILAR" dengan:

$$u \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}} \rightarrow y$$

dengan matrix $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

di mana

$\lambda_1, \lambda_2, ----\lambda_n$

adalah nilai2 eigen matrix A [nxn]

Karena itu untuk $u = u(t) = \delta(t)$:

TANGGAPAN DENYUT-nya:

$$y(t) = \hat{C}\left[e^{Dt}\right]\hat{x}(0)$$

y(t) menuju 0 jika $[e^{Dt}]$ menuju 0 untuk t > 0

Tanggapan Denyut untuk model Ruang Keadaan dengan Matrix Diagonal D pada Persamaan Keadaan (LANJUTAN)

u

$$\dot{\hat{x}} = D\hat{x} + \hat{B}u$$
$$y = \hat{C}\hat{x} + Du$$

y

"SIMILAR" dengan:

u

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

y

y(t) menuju 0 jika [e^{Dt}] menuju 0 untuk t > 0

Bisa dibuktikan, bahwa:

$$[e^{Dt}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

karena D matrix diagonal.

λ_i nilai² eigen matrix A

$= a_i + jb_i$

$\{a_i, b_i\} \in$ Real, $j = \sqrt{-1}$

dan:

$$e^{\lambda_i t} = e^{(a_i + jb_i)t} = e^{a_i t} \cdot e^{jb_i t} \qquad i = 1, \dots n$$
$$= e^{a_i t}[\cos b_i t + j\sin b_i t]$$

yang hanya menuju NOL, jika $a_i < 0$

SYARAT KESTABILAN

- **DEFINISI:** Suatu **SISTEM KENDALI** atau **KENDALIAN** dikatakan **STABIL** jika **TANGGAPAN DENYUT**-nya menuju **0**.
- **ARTINYA**: Jika masukan **u(t)** berupa **isyarat denyut satuan** menghasilkan keluaran **y(t)** yang menuju **NOL**, maka sistem **STABIL**.
- Masukan **u(t)** berupa **isyarat denyut satuan** akan menghasilkan keluaran **y(t)** yang menuju **NOL** jika **SEMUA** nilai-eigen matrix **A** memiliki bagian ***real*** yang **negatif**.

TEOREMA: Suatu **SISTEM KENDALI** atau **KENDALIAN** (yang dimodelkan dengan Model Ruang Keadaan) dikatakan **STABIL** jika **TANGGAPAN DENYUT**-nya menuju **0,** yaitu jika **SEMUA nilai-eigen** matrix **A** berada di **sebelah kiri sumbu khayal** pada bidang kompleks.

CONTOH-CONTOH

Contoh: * $\dot{x} = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

$\det[\lambda I - A] = 0$ $\quad \lambda I - A = \begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$\lambda^2 = 0$ $\quad = \begin{bmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda\end{bmatrix}$

$\lambda_{1,2} = 0$

(tidak berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks) → TIDAK STABIL

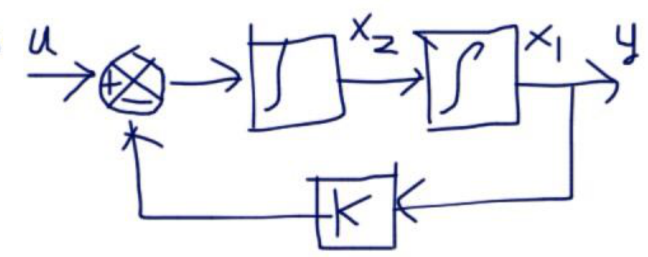
* $\dot{x} = \begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$ $\quad [\lambda I - A] = \begin{bmatrix}\lambda&-1\\2&\lambda+3\end{bmatrix}$

$\det[\lambda I - A] = \lambda(\lambda+3)+2 = 0$ $\quad \lambda_1 = -2$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda+2)(\lambda+1) = 0 \nearrow$ $\lambda_2 = -1$

STABIL

* Bagaimana dengan $K > 0$



$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -Kx_1 + u$

$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-K&0\end{bmatrix}}_{A}x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix}\lambda&-1\\K&\lambda\end{bmatrix}$

$\det[\lambda I - A] : \lambda^2 + K = 0$

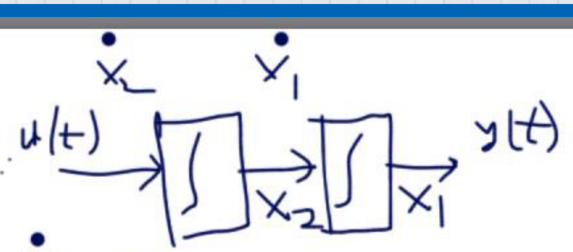
$\lambda^2 = -K \rightarrow \lambda_1 = -j\sqrt{K}$

$\lambda_2 = +j\sqrt{K}$

TIDAK STABIL ⇐ Bagian Real non-negatif

Contoh:

* Double Integrator



$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = u$

$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}_{A}x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

$\det[\lambda I - A] = 0$

$\det\left\{\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\} = 0$

$\det\begin{bmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda\end{bmatrix} = \lambda^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ non-negatif

TIDAK STABIL ⟵

Contoh: * $\dot{x} = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

$\det[\lambda I - A] = 0$ $\quad \lambda I - A = \begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$\lambda^2 = 0$ $\quad = \begin{bmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda\end{bmatrix}$

$\lambda_{1,2} = 0$

(tidak berada di sebelah kiri sumbu khayal pada bidang kompleks) → TIDAK STABIL

* $\dot{x} = \begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$ $\quad [\lambda I - A] = \begin{bmatrix}\lambda&-1\\2&\lambda+3\end{bmatrix}$

$\det[\lambda I - A] = \lambda(\lambda+3)+2 = 0$ $\quad \lambda_1 = -2$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda+2)(\lambda+1) = 0 \nearrow$ $\lambda_2 = -1$

STABIL

MODUL PEMBELAJARAN SELANJUTNYA

- MODUL 01: (Pengantar/*Review*) Model RUANG KEADAAN (*State Space*)
- MODUL 02: Konversi Model RUANG KEADAAN ke NISBAH ALIH (ss2tf)
- MODUL 03: Konversi Model NISBAH ALIH ke RUANG KEADAAN (tf2ss)
- MODUL 04: Transformasi SIMILARITAS
- MODUL 05: TANGGAPAN dan KESTABILAN
- **MODUL 06: KETERKENDALIAN dan KETERAMATAN**
- MODUL 07: UMPAN-BALIK PEUBAH KEADAAN
- MODUL 08: PRAKTIKUM INDIVIDU & KELOMPOK

SELAMAT BELAJAR

Semoga SUKSES meraih PRESTASI!