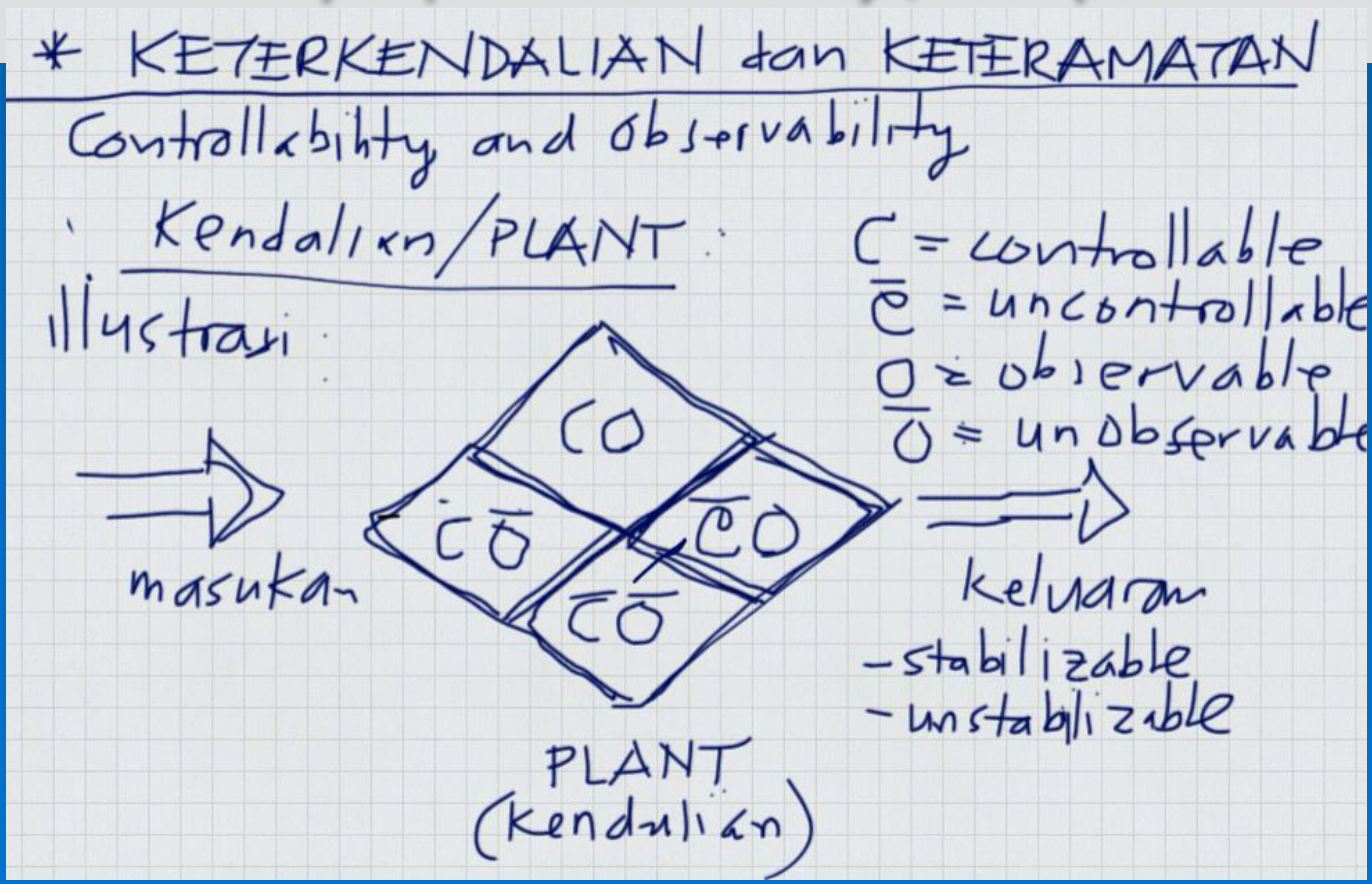
328D4103
Sistem Kendali + Praktikum
MODUL 06
Keterkendalian dan Keteramatan

(Semester Awal 2020-2021

Keterkendalian dan Keteramatan

- Sumber pembelajaran: https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Sistem-Kendali/Catatan-Kuliah-2017/
- Catatan Kuliah Lengkap 2016-2017: https://web.unhas.ac.id/rhiza/arsip/kuliah/Sistem-Kendali/Catatan-Kuliah-Sistem-Kendali-2016-2017.pdf (dibuka *on-line* saja, tidak perlu diunduh)



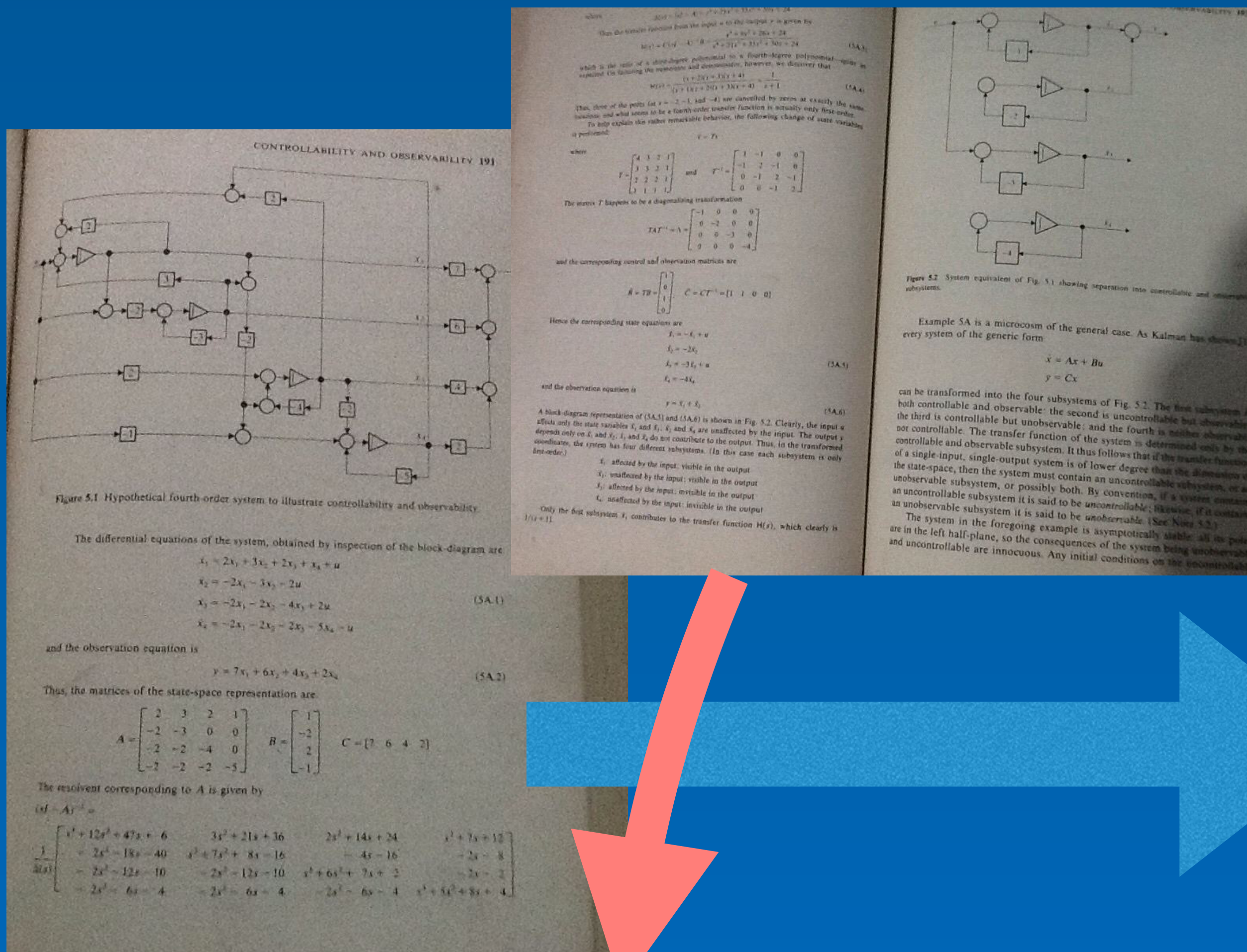
DEFINISI

- Suatu kendalian yang dimodelkan dengan Model Ruang Keadaan, dikatakan mempunyai bagian yang **TERKENDALI** (***CONTROLLABLE***) jika semua peubah keadaan pada bagian itu dapat dipengaruhi oleh minimal salah satu isyarat masukan.
- Suatu kendalian yang dimodelkan dengan Model Ruang Keadaan, dikatakan mempunyai bagian yang **TERAMATI** (***OBSERVABLE***) jika semua peubah keadaan pada bagian itu dapat mempengaruhi minimal salah satu isyarat keluaran.
- Jika semua bagian dari suatu kendalian yang dimodelkan dengan Model Ruang Kendalian merupakan bagian yang **TERKENDALI** (***CONTROLLABLE***), maka kendalian tersebut dikatakan **SEPENUHNYA TERKENDALI** (***COMPLETELY CONTROLLABLE***).
- Jika semua bagian dari suatu kendalian yang dimodelkan dengan Model Ruang Kendalian merupakan bagian yang **TERAMATI** (***OBSERVABLE***), maka kendalian tersebut dikatakan **SEPENUHNYA TERAMATI** (***COMPLETELY OBSERVABLE***).

KONSEKUENSI

- Suatu kendalian yang **SEPENUHNYA TERKENDALI** (***COMPLETELY CONTROLLABLE***) pasti dapat distabilkan, dikatakan sebagai kendalian yang *stabilizable*.
- Suatu kendalian yang **SEPENUHNYA TERKENDALI** (***COMPLETELY CONTROLLABLE***) dan **SEPENUHNYA TERAMATI** (***COMPLETELY OBSERVABLE***) pasti dapat distabilkan dengan pengendali umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*).
- Suatu kendalian yang **SEPENUHNYA TERKENDALI** (***COMPLETELY CONTROLLABLE***) tapi **TIDAK SEPENUHNYA TERAMATI** (***NOT COMPLETELY OBSERVABLE***) masih dapat distabilkan dengan pengendali umpan-balik peubah keadaan (*state-variable feedback*), dengan menambahkan sistem pengamat atau *observer*.
- Suatu kendalian yang **TIDAK SEPENUHNYA TERKENDALI** (***NOT COMPLETELY CONTROLLABLE***) masih dapat distabilkan, asalkan bagian yang tidak stabil merupakan bagian yang **TERKENDALI** (***CONTROLLABLE***).

CONTOH (dikutip dari Friedland, [1986], page 191–193)



Contoh : Kendalian : $\begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{bmatrix}$

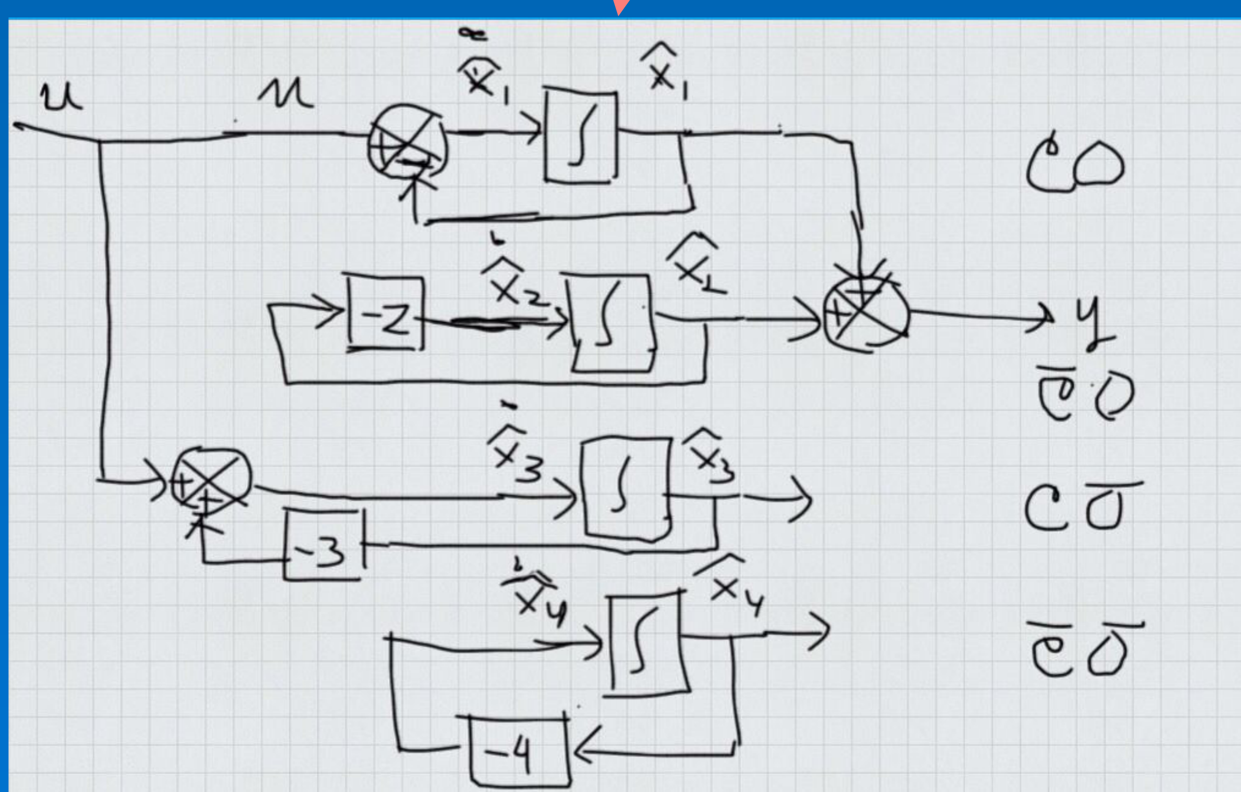
$$A_{[4\times4]} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad D = [\emptyset]$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Transf. SIMILARITAS

$$\hat{x} = Tx$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Pers. Keadaan :

$\hat{x} = Tx$ hasil Transf. SIMILARITAS

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1 + u \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -2\hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -3\hat{x}_3 + u \\ \dot{\hat{x}}_4 &= -4\hat{x}_4 \end{aligned}\right\} [\hat{A}], [\hat{B}]$$

Pers. Keluaran :

$$y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \quad [\hat{C}], [\hat{D}]$$

$\hat{x}_1$: CO

$\hat{x}_2$: $\bar{C}O$

$\hat{x}_3$: $C\bar{O}$

$\hat{x}_4$: $\bar{C}\bar{O}$

→ Bagan Kotak →

nilai-eigen A dan $\hat{A}$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{kendalian stabil}$$

UJI KETERKENDALIAN

- **KETERKENDALIAN** dari suatu kendalian **LTI** (***Linear Time-Invariant***, matrix **A**, **B**, **C** dan **D** semua **matrix konstan**) yang dimodelkan dengan Model Ruang Keadaan dapat diuji dengan membentuk **Matrix Keterkendalian P**.
- Untuk matrix **A** [**n x n**] dan matrix **B** [**n x m**], **Matrix Keterkendalian P** [**n x** [**nxm**]] (**n** baris [**nxm**] kolom):

$$\boxed{P = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad \ldots\ldots\ldots \; A^{n-1}B]}$$

- Kendalian **LTI SEPENUHNYA TERKENDALI** (***COMPLETELY CONTROLLABLE***) jika dan hanya jika matrix keterkendalian **P**-nya ***full rank*** atau ***rank***(**P**) = **n**
- Khusus untuk kendalian **LTI** yang ***single-input***, **m** = **1**, dengan matrix **P** [**n x n**], akan **SEPENUHNYA TERKENDALI** (***COMPLETELY CONTROLLABLE***), ***rank***(**P**) = **n**, jika dan hanya jika matrix **P** ***non-singular*** = ***invertible*** = **determinannya tidak sama dengan nol.**

UJI KETERAMATAN

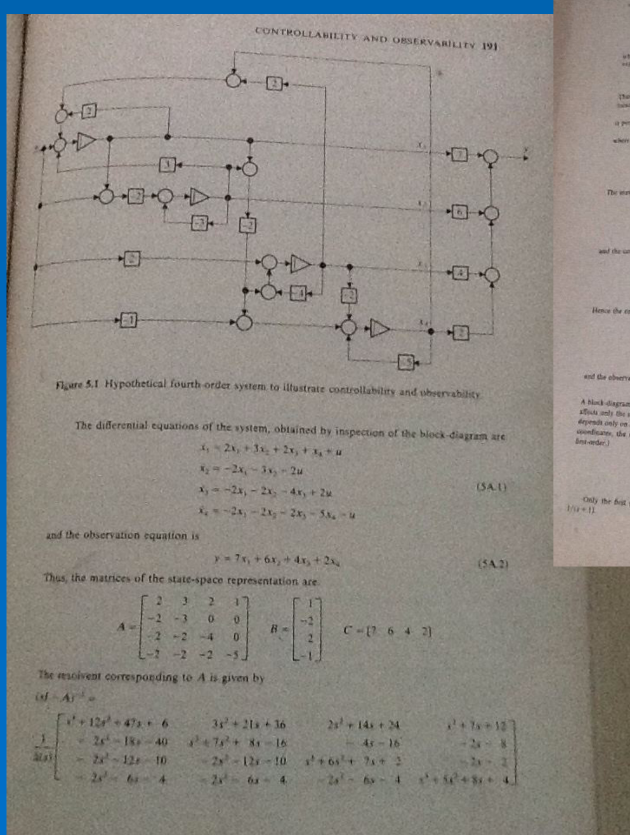
- **KETERAMATAN** dari suatu kendalian **LTI** (***Linear Time-Invariant***, matrix **A**, **B**, **C** dan **D** semua **matrix konstan**) yang dimodelkan dengan Model Ruang Keadaan dapat diuji dengan membentuk **Matrix Keteramatan Q**.
- Untuk matrix **A** [**n x n**] dan matrix **C** [**k x n**], **Matrix Keteramatan Q** [**n x** [**nxk**]] (**n** baris [**nxk**] kolom):

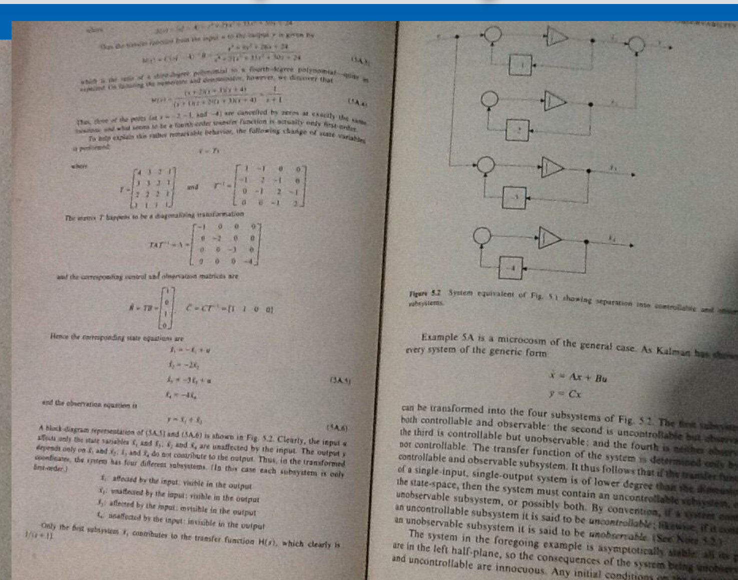
$$\boxed{Q = [C^T \;\; A^T C^T \;\; (A^T)^2 C^T \;\; (A^T)^3 C^T \ldots\ldots\ldots (A^T)^{n-1} C^T]}$$

- Kendalian **LTI SEPENUHNYA TERAMATI** (***COMPLETELY OBSERVABLE***) jika dan hanya jika matrix keterkendalian **Q**-nya ***full rank*** atau ***rank***(**Q**) = **n**
- Khusus untuk kendalian **LTI** yang ***single-output***, **k** = **1**, dengan matrix **Q** [**n x n**], akan **SEPENUHNYA TERKENDALI** (***COMPLETELY OBSERVABLE***), ***rank***(**Q**) = **n**, jika dan hanya jika matrix **Q** ***non-singular*** = ***invertible*** = **determinannya tidak sama dengan nol.**

TUGAS MANDIRI (tidak dikumpul)

- Silakan di-*Google* kata kunci: “***rank*** dari suatu **matrix**”, lalu dari referensi yang diperoleh, pelajari pengertian ***rank*** dari suatu matrix
- Tentukan matrix keterkendalian **P** dan matrix keteramatan **Q** dari contoh model kendalian **LTI** di bawah ini, dan juga hasil transformasi similaritas-nya (boleh menggunakan MATLAB)
- Tentukan ***rank***(**P**) dan ***rank***(**Q**) dari contoh di bawah ini, dan juga dari hasil transformasi similaritas-nya, dengan menggunakan perintah >>> rank() di MATLAB
- Apakah kendalian ini sepenuhnya terkendali dan sepenuhnya teramati? Jelaskan.





Contoh: Kendalian: $\left[\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array}\right]$

$$\underset{[4\times4]}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad D = [\emptyset]$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Transf. SIMILARITAS

$$\bar{x} = Tx$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MODUL PEMBELAJARAN SELANJUTNYA

- MODUL 01: (Pengantar/*Review*) Model RUANG KEADAAN (*State Space*)
- MODUL 02: Konversi Model RUANG KEADAAN ke NISBAH ALIH (ss2tf)
- MODUL 03: Konversi Model NISBAH ALIH ke RUANG KEADAAN (tf2ss)
- MODUL 04: Transformasi SIMILARITAS
- MODUL 05: TANGGAPAN dan KESTABILAN
- MODUL 06: KETERKENDALIAN dan KETERAMATAN
- **MODUL 07: UMPAN-BALIK PEUBAH KEADAAN**
- MODUL 08: PRAKTIKUM INDIVIDU & KELOMPOK (luring)

SELAMAT BELAJAR

Semoga SUKSES meraih PRESTASI!