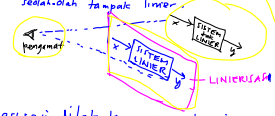
## LINIERISASI

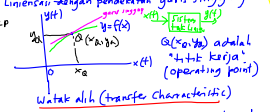
Linierisasi hukanlah me-linier-kan sistem yang tidak linier. Linierisasi hanyalah "cara pandang" untuk melihat suatu sistem tak linier sehingga sedalah-olah tampak linier.




Linierisasi dilakukan agar teori, analisis dan metode desain sistem linier dapat diterapkan dalam batas-batas tertentu pada sistem tak linier.

Ada berbagai metode linierisasi, tidak ada "metode linierisasi" yang berlaku umum untuk semua jenis ko-tidak-linieran. Sering terjadi ada suatu metode linierisasi yang berhasil diterapkan pada satu kasus, tapi tidak berhasil atau tidak dapat diterapkan pada kasus yang lain.

* Contoh Linierisasi dengan pendekatan garis singgung




Q(xa,ya) adalah "titik kerja" (operating point)

Linierisasi dengan pendekatan garis singgung dilakukan pada suatu titik kerja. Garis singgung tersebut akan menjadi hasil linierisasi.

Arah garis singgung pada titik kerja Q(xa,ya):

$$a = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{Q(x_a,y_a)}$$

sehingga persamaan garis singgung:

$$(y - y_a) = a(x - x_a)$$

adalah hasil linierisasi dengan pendekatan garis singgung. Linierisasi dikatakan berhasil jika persamaan garis singgung merupakan sistem linier.

Misalnya suatu modulator

$$y(t) = 5\sin[x(t)]$$

yang merupakan sistem tak linier (buktikan utk latihan) akan di-linierisasi pada Q(0,0)

Arah garis singgung:

$$a = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{Q(0,0)}$$

$f(x) = y = 5\sin x$

$$a = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{Q(0,0)} = 5\cos x_Q = 5\cos 0 = 5$$

Pers. garis singgung:

$(y - y_Q) = a(x - x_Q)$

$y = 5x$

Hasil linierisasi

$y(t) = 5x(t)$ → buktikan sistem linier

Jika dilinierisasi pada P(π, 0), maka

$$a = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{P(\pi,0)} = 5\cos\pi = -5$$

Pers. garis singgung:

$(y - y_P) = a(x - x_P)$

$y - 0 = -5(x - \pi)$

$y = -5x + 5\pi$

Hasil linierisasi

$y(t) = -5x(t) + 5\pi$

* Apakah penguat $y(t) = Ke^{-at}x(t)$ suatu sistem linier? Buktikan!

Jawab: Ya, $y(t) = Ke^{-at}x(t)$ adalah sistem linier

Bukti:

| Masukan | Keluaran |
|---|---|
| Sembarang $x_1(t)$ | $y_1(t) = Ke^{-at}x_1(t)$ |
| $x_2(t)$ | $y_2(t) = Ke^{-at}x_2(t)$ |

Sembarang $\alpha_1$ dan $\alpha_2$

Kombinasi linier isyarat masukan $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ → $y(t) = Ke^{-at}x(t)$

$= Ke^{-at}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]$

$= Ke^{-at}\alpha_1 x_1(t) + Ke^{-at}\alpha_2 x_2(t)$

$= \alpha_1 Ke^{-at}x_1(t) + \alpha_2 Ke^{-at}x_2(t)$

$= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

(kombinasi linier isyarat keluaran)

Setiap kombinasi linier isyarat masuka selalu menghasilkan kombinasi linier isyarat keluaran (q.e.d.)

LTV: Linear Time-Varying

* Apakah fungsi penyearah $y(t) = |x(t)|$ termasuk sistem linier? Buktikan!

Jawab: Tidak, penyearah adalah sistem tak linier

Bukti:

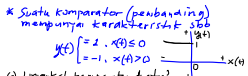
Bukan bukti

| Masukan | Keluaran |
|---|---|
| $x_1 = 1$ | $y_1 = \lvert x_1\rvert = \lvert 1\rvert = 1$ |
| $x_2 = 2$ | $y_2 = \lvert x_2\rvert = \lvert 2\rvert = 2$ |
| $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4$ | Kombinasi Linier isyarat Keluaran: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$ |

Kombinasi Linier Isyarat Masukan: $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$ → $y = \lvert x\rvert = \lvert 11\rvert = 11$ ???

* Suatu komparator (pembanding) mempunyai karakteristik sbb:

$$y(t) = \begin{cases} 1, & x(t) \le 0 \\ -1, & x(t) > 0 \end{cases}$$




(a) Linierkah komparator di atas? (b) Buktikan!

* Jawab: (a) Tidak, Komparator di atas adalah sistem tak linier

(b) Bukti:

| Masukan | Keluaran |
|---|---|
| $x_1(t) = -2$ | $y_1(t) = 1$ |
| $x_2(t) = +2$ | $y_2(t) = -1$ |
| $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 4$ | kombinasi linier isyarat keluar: $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = 1 \cdot 1 + 4(-1) = -3$ |

Kombinasi linier isyarat masukan: $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$

$= 1 \cdot -2 + 4 \cdot 2$

$= -2 + 8 = 6$ → $y(t) = -1$

$y(t) \neq \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

karena $-1 \neq -3$

Jadi sistem tak linier karena kombinasi linier isyarat masukan tidak menghasilkan kombinasi linier isyarat keluaran. (q.e.d.)

Masukan → Keluaran

$x_1 = 1$ → $y_1 = |x_1| = |1| = 1$

$x_2 = 2$ → $y_2 = |x_2| = |2| = 2$

$\alpha_1 = 0{,}5$ $\alpha_2 = -4$ → kombinasi linier isyarat keluaran: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0{,}5 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -7{,}5$

Kombinasi Linier Isyarat Masukan:

$x = 0{,}5 \cdot 1 + (-4) \cdot 2$

$= -7{,}5$ → $y(t) = |x| = |-7{,}5| = 7{,}5$

Kombinasi Linier Isyarat Masukan tidak menghasilkan Kombinasi linier isyarat keluaran

$y(t) \neq \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

karena $-7{,}5 \neq 7{,}5$ (q.e.d.)

## SISTEM LINIER dan TAK LINIER

DEFINISI: Suatu sistem dikatakan linier jika kombinasi linier isyarat masukan selalu menghasilkan kombinasi linier isyarat keluaran

Maksudnya


Masukan $x_1(t)$ menghasilkan $y_1(t)$

Masukan $x_2(t)$ menghasilkan $y_2(t)$

Konstanta $\alpha_1$ dan $\alpha_2$ (sembarang, bukan nol)

Kombinasi linier isyarat masukan: $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ → $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

Kombinasi linier isyarat keluaran

Selalu (tanpa memilih-milih $x_1(t), x_2(t), \alpha_1$ dan $\alpha_2$)

* Contoh

* Penguat $y(t) = Kx(t)$, tunjukkan ke-LINIER-annya

| Masukan | Keluaran |
|---|---|
| Sembarang $x_1(t)$ | $y_1(t) = Kx_1(t)$ |
| $x_2(t)$ | $y_2(t) = Kx_2(t)$ |
| Sembarang $\alpha_1$ dan $\alpha_2$ | Kombinasi linier Keluaran: $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ |

Kombinasi linier masukan: $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ → $y(t) = Kx(t)$

$= K[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]$

$= K\alpha_1 x_1(t) + K\alpha_2 x_2(t)$

$= \alpha_1 (Kx_1(t)) + \alpha_2 (Kx_2(t))$

$= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

(Kombinasi linier keluaran)

Ternyata setiap kombinasi linier isyarat masukan SELALU menghasilkan kombinasi linier isyarat keluaran

(q.e.d.)

TERBUKTI

Quod Erat Demonstrandum

LTI = Linear Time Invariant

* Suatu modulator amplitudo (AM) mempunyai keluaran $y(t) = x(t)\sin(2\pi f_c t)$, $f_c$ frekuensi pembawa (carrier)

(a) Linierkah sistem AM di atas?

(b) Buktikan!

Jawab: (a) Sistem AM adalah sistem linier

(b) Bukti:

Masukan → Keluaran

Sembarang $x_1(t)$ → $y_1(t) = x_1(t)\sin(2\pi f_c t)$

sembarang $x_2(t)$ → $y_2(t) = x_2(t)\sin(2\pi f_c t)$

sembarang $\alpha_1$ dan $\alpha_2$ → $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ (kombinasi linier isyarat keluaran)

Kombinasi linier isyarat masukan: $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ → $y(t) = x(t)\sin(2\pi f_c t)$

$= [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]\sin(2\pi f_c t)$

$= \alpha_1 x_1(t)\sin(2\pi f_c t) + \alpha_2 x_2(t)\sin(2\pi f_c t)$

$= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

Jadi sistem AM di atas adalah sistem linier karena kombinasi linier isyarat masukan selalu menghasilkan kombinasi linier isyarat keluaran

Bandingkan dengan modulator fasa

$y(t) = A\sin(2\pi f_c t + x(t))$

Buktikan bahwa modulator fasa adalah sistem tak linier!

Bukti:

Masukan → Keluaran

Pada $t = 0$

$x_1(t) = \frac{\pi}{2}$ → $y_1(t) = A\sin(x_1(t)) = A\sin\frac{\pi}{2} = A$

$x_2(t) = \frac{\pi}{3}$ → $y_2(t) = A\sin(x_2(t)) = A\sin\frac{\pi}{3} = 0{,}866A$

$\alpha_1 = 2$ dan $\alpha_2 = 3$ → $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = 2A + 3(0{,}866)A = 4{,}598A$

$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$

$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$ → $y(t) = A\sin(x(t))$

$= A\sin 2\pi = 0$

Terbukti sistem tak linier karena pada $t = 0$ ada kombinasi linier isyarat masukan yang tidak menghasilkan kombinasi linier isyarat keluaran (q.e.d)

* Latihan

Tunjukkan apakah sistem-sistem berikut linier atau tidak!

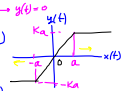
| | $y(t)$ keluaran, $x(t)$ masukan |
|---|---|
| * INTEGRATOR | $y(t) = \int x(t)\,dt$ |
| * DIFFERENSIATOR | $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ |

* Penguat dengan "OFFSET"

$y(t) = Kx(t) + a$ $\quad x(t) = 0 \rightarrow y(t) = a$ (offset)

* Penguat jenuh (saturating amp)

$$y(t) = \begin{cases} Kx(t), & |x(t)| \le a \\ K_a, & x(t) > a \\ -K_a, & x(t) < a \end{cases}$$




* Penguat logarithmik (log amp)

$y(t) = K\log|x(t)|$, $x(t) \neq 0$

* Modulator Frekuensi (FM)

$y(t) = A\sin\left(2\pi\left[f_c + x(t)\right]t\right)$